Corrigé
Orthogonalité et distances dans l'espace

Calculer un produit scalaire dans l'espace

Exercice 1.

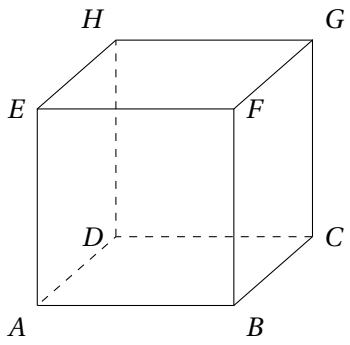
Dans un repère orthonormé, on donne $\vec{u}(2\,;\,-1\,;\,3)$, $\vec{v}(1\,;\,4\,;\,1)$ et $\vec{w}(-1\,;\,2\,;\,2)$.

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$.
2. Quels vecteurs sont orthogonaux?
3. Calculer une mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$ au degré près.

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2-4+3 = 1$; $\vec{u}\cdot\vec{w} = -2-2+6 = 2$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$; $\|\vec{w}\| = 3$. ($\vec{v}\cdot\vec{w} = -1+8+2 = 9$.)
2. Aucun couple.
3. $\cos\theta = \frac{2}{3\sqrt{14}} \approx 0,178$: $\theta \approx 80°$.

Exercice 2.

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a. Calculer, en utilisant des projections ou des décompositions :



1. $\vec{AB}\cdot\vec{AG}$;
2. $\vec{AE}\cdot\vec{BG}$;
3. $\vec{EG}\cdot\vec{BD}$;
4. $\vec{AF}\cdot\vec{AH}$, puis l'angle $\widehat{FAH}$.

1. Le projeté de G sur (AB) est B : a^2.
2. $\vec{BG} = \vec{BC} + \vec{CG}$ et $\vec{AE}\cdot\vec{BC} = 0$, $\vec{AE}\cdot\vec{CG} = a^2$: a^2.
3. $\vec{EG} = \vec{AC}$ et $\vec{AC}\cdot\vec{BD} = 0$ (diagonales du carré) : 0.
4. $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE}$, $\vec{AH} = \vec{AD} + \vec{AE}$: produit = a^2. $AF = AH = a\sqrt{2}$, $\cos\widehat{FAH} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$: 60° (triangle AFH équilatéral).

Démontrer une orthogonalité

Exercice 3.

Dans un repère orthonormé, $A(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $C(2\ ;\ 0\ ;\ 3)$ et $D(2\ ;\ -4\ ;\ 1)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Montrer que $\vec{n}(1\ ;\ -4\ ;\ -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC), puis calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ (rappel : $V = \frac{1}{3} \times$ aire de base $\times$ hauteur).

1. $\vec{AB}(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$, $\vec{AC}(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 + 0 - 2 = 0$.
2. $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 - 4 + 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 + 0 - 1 = 0$; $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
3. $\vec{AD}(1\ ;\ -4\ ;\ -1) = \vec{n}$: (AD) est orthogonale au plan. $AB = 3$, $AC = \sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{2}$. $V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 3$.

Exercice 4.

Déterminer un vecteur normal au plan dirigé par $\vec{u}(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et $\vec{v}(3\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

$\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$: $a + 2b - c = 0$ et $3a + c = 0$. Avec $a = 1$: $c = -3$, $2b = c - a = -4$, $b = -2$.
$\vec{n}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$.

Exercice 5. [Cube]

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 de l'exercice 2 et le repère $(A\ ;\ \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Donner les coordonnées de tous les sommets.
2. Montrer que $\vec{CE}$ est normal au plan (BDG).
3. Les droites (AH) et (BG) sont-elles orthogonales ? sécantes ?

1. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$.
2. $\vec{CE}(-1\ ;\ -1\ ;\ 1)$, $\vec{BD}(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $\vec{BG}(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$: $\vec{CE} \cdot \vec{BD} = 1 - 1 = 0$ et $\vec{CE} \cdot \vec{BG} = -1 + 1 = 0$.
3. $\vec{AH}(0\ ;\ 1\ ;\ 1) = \vec{BG}$: elles sont parallèles, donc ni orthogonales ni sécantes.

Déterminer un projeté orthogonal et une distance

Exercice 6.

Dans un repère orthonormé, d est la droite passant par $A(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$. Soit $M(3\ ;\ 1\ ;\ 4)$.

1. Un point H de d s'écrit $H(1+t\ ;\ 2\ ;\ t)$. Déterminer t pour que $\vec{MH}\cdot\vec{u}=0$.
2. En déduire le projeté orthogonal de M sur d et la distance de M à d.

1. $\vec{MH}(t-2\ ;\ 1\ ;\ t-4)$; $\vec{MH}\cdot\vec{u}=2t-6=0$: $t=3$.
2. $H(4\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $\vec{MH}(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $MH=\sqrt{3}$.

Exercice 7.

On reprend le cube de l'exercice 5. Soit $K\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

1. Montrer que $\vec{BK}=\frac{1}{3}\vec{BD}+\frac{1}{3}\vec{BG}$. Que peut-on en déduire pour K ?
2. Montrer que $\vec{EK}$ est colinéaire à $\vec{CE}$.
3. En déduire que K est le projeté orthogonal de E sur le plan (BDG) et la distance de E à ce plan.

1. $\vec{BK}\left(-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ et $\frac{1}{3}(-1;1;0)+\frac{1}{3}(0;1;1)=\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$: $K\in(BDG)$.
2. $\vec{EK}\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}\vec{CE}$.
3. (EK) est orthogonale au plan et K est dans le plan. $EK=\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.