Primitives et équations différentielles

Déterminer une primitive

Exercice 1.

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1(x) = 4x^3 - 6x + 5$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$
3. $f_3(x) = \dfrac{3}{x} + \mathrm{e}^x$ sur $]0\,;\,+\infty[$
4. $f_4(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_5(x) = x\left(x^2-1\right)^3$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$
7. $f_7(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$
8. $f_8(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

Exercice 2.

1. Montrer que $F(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$ est une primitive de $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la primitive G de f qui s'annule en 0.

Exercice 3.

Déterminer la primitive F de $f(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ telle que $F(1) = 0$.

Résoudre une équation y' = ay

Exercice 4.

Résoudre les équations différentielles avec la condition donnée.

1. $y' = 3y$ et $y(0) = 2$.
2. $2y' + y = 0$ et $y(2) = \mathrm{e}$.

Résoudre une équation y' = ay + b

Exercice 5.

Résoudre $y' = 2y - 4$ avec $y(0) = 5$.

Exercice 6. [Loi de refroidissement de Newton]

Un café à 90 °C est posé dans une pièce à 20 °C. Sa température $T(t)$ (en °C, t en minutes) vérifie $T' = -0,1\,(T - 20)$.

1. Exprimer $T(t)$ en fonction de t.
2. Déterminer la limite de T en $+\infty$ et l'interpréter.
3. Au bout de combien de temps le café sera-t-il à 40 °C ? (arrondir à la minute)

Exercice 7. [Avec un second membre]

On considère $(E) : y' = -y + 2x + 1$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $y_p(x) = ax + b$ soit solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

Corrigé

