Corrigé
Primitives et équations différentielles

Déterminer une primitive

Exercice 1.

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1(x) = 4x^3 - 6x + 5$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$
3. $f_3(x) = \dfrac{3}{x} + \mathrm{e}^x$ sur $]0\,;\,+\infty[$
4. $f_4(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_5(x) = x\left(x^2-1\right)^3$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$
7. $f_7(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$
8. $f_8(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

1. $x^4 - 3x^2 + 5x$
2. $-\dfrac{1}{x}$
3. $3\ln x + \mathrm{e}^x$
4. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}$
5. $\frac{1}{8}\left(x^2-1\right)^4$
6. $\frac{1}{2}\ln(2x+1)$
7. $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$
8. $\frac{1}{2}(\ln x)^2$

Exercice 2.

1. Montrer que $F(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$ est une primitive de $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la primitive G de f qui s'annule en 0.

1. $F'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$.
2. $G(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + C$ avec $G(0) = -1 + C = 0$: $G(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1$.

Exercice 3.

Déterminer la primitive F de $f(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ telle que $F(1) = 0$.

$F(x) = 2x^3 + \frac{2}{x} + C$; $F(1) = 4 + C = 0$: $F(x) = 2x^3 + \frac{2}{x} - 4$.

Résoudre une équation y' = ay

Exercice 4.

Résoudre les équations différentielles avec la condition donnée.

1. $y' = 3y$ et $y(0) = 2$.
2. $2y' + y = 0$ et $y(2) = \mathrm{e}$.

1. $y(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.
2. $y' = -\frac{1}{2}y$: $y = C\mathrm{e}^{-x/2}$, $C\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}$, $C = \mathrm{e}^2$: $y(x) = \mathrm{e}^{2-x/2}$.

Résoudre une équation y' = ay + b

Exercice 5.

Résoudre $y' = 2y - 4$ avec $y(0) = 5$.

Solution constante $k = 2$. $y(x) = C\mathrm{e}^{2x} + 2$, $C + 2 = 5$: $y(x) = 3\mathrm{e}^{2x} + 2$.

Exercice 6. [Loi de refroidissement de Newton]

Un café à 90 °C est posé dans une pièce à 20 °C. Sa température $T(t)$ (en °C, t en minutes) vérifie $T' = -0,1\,(T - 20)$.

1. Exprimer $T(t)$ en fonction de t.
2. Déterminer la limite de T en $+\infty$ et l'interpréter.
3. Au bout de combien de temps le café sera-t-il à 40 °C? (arrondir à la minute)

1. $T' = -0,1T + 2$: solution constante 20, $T(t) = C\mathrm{e}^{-0,1t} + 20$, $T(0) = 90$: $T(t) = 70\mathrm{e}^{-0,1t} + 20$.
2. 20 : le café finit à la température de la pièce.
3. $70\mathrm{e}^{-0,1t} = 20$, $t = 10\ln 3,5 \approx 12,5$: environ 13 minutes.

Exercice 7. [Avec un second membre]

On considère $(E) : y' = -y + 2x + 1$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $y_p(x) = ax + b$ soit solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

1. $a = -(ax+b)+2x+1$ pour tout x : $-a+2 = 0$ et $a = -b+1$, donc $a = 2$, $b = -1$: $y_p(x) = 2x - 1$.
2. $y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1$, $C \in \mathbb{R}$.