Suites et récurrence

Étudier le sens de variation d'une suite

Exercice 1.

Étudier le sens de variation de chaque suite définie sur $\mathbb{N}$.

1. $u_n = n^2 - 4n + 1$
2. $v_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$
3. $w_n = \dfrac{3^n}{n+1}$
4. $t_{n+1} = t_n - n^2 - 1$, $t_0 = 5$

Exercice 2.

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}$ et la suite $u_n = f(n)$. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire celles de (u_n).

Démontrer par récurrence

Exercice 3.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Vérifier la formule du 2. pour $n = 10$.

```
def somme_carres(n):
    s = 0
    for k in range(1, ...):
        s = ...
    return s
```

Exercice 4.

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 5.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 6.

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 7.

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
2. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
3. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie u_n. Calculer `u(5)`, `u(10)` et `u(20)`. Quelle conjecture peut-on faire ?

```
from math import sqrt
def u(n):
    u = 0
    for i in range(n):
        u = ...
    return u
```

Étudier une suite majorée, minorée ou bornée

Exercice 8.

Les suites suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées ? Justifier.

1. $u_n = 3 - \dfrac{2}{n+1}$
2. $v_n = (-2)^n$
3. $w_n = \dfrac{\cos n}{n+1}$
4. $t_n = n + \dfrac{1}{n+1}$

Exercice 9. [Algorithme]

Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$.

1. Écrire une fonction Python `terme(n)` qui renvoie u_n.
2. Démontrer par récurrence que pour tout n, $u_n \leqslant 10$, puis que la suite est croissante.

Corrigé

