Corrigé
Somme de variables aléatoires

Utiliser la linéarité de l'espérance et la variance

Exercice 1.

La loi de X est donnée par le tableau :

x_i	-2	0	3
$P(X=x_i)$	$0,3$	$0,5$	$0,2$

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. En déduire l'espérance et la variance de $Y=2X+1$, puis de $Z=-X+4$.

1. $E(X)=-0,6+0+0,6=0$; $E(X^2)=1,2+1,8=3$; $V(X)=3$.
2. $E(Y)=1$, $V(Y)=12$; $E(Z)=4$, $V(Z)=3$.

Exercice 2.

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes avec $E(X)=4$, $V(X)=2$, $E(Y)=-1$ et $V(Y)=3$. Calculer l'espérance et la variance de $X+Y$, puis de $2X-3Y$.

$E(X+Y)=3$, $V(X+Y)=5$. $E(2X-3Y)=8+3=11$, $V(2X-3Y)=4\times 2+9\times 3=35$.

Étudier une somme de variables aléatoires

Exercice 3.

On lance un dé équilibré à six faces et une pièce équilibrée. Le joueur gagne le nombre de points indiqué par le dé, plus 10 points si la pièce tombe sur Pile. On note D le résultat du dé, P les points de la pièce (0 ou 10) et $G=D+P$.

1. Calculer $E(D)$, $V(D)$, $E(P)$ et $V(P)$.
2. En déduire $E(G)$ et $V(G)$. Justifier.

1. $E(D)=3,5$, $V(D)=\frac{35}{12}$; $E(P)=5$, $V(P)=\frac{1}{2}\times 25+\frac{1}{2}\times 25=25$.
2. $E(G)=8,5$ (linéarité). D et P indépendantes : $V(G)=\frac{35}{12}+25=\frac{335}{12}\approx 27,9$.

Exercice 4. [Loi binomiale]

Un tireur atteint sa cible avec la probabilité 0,7 ; les 10 tirs sont indépendants. On note X le nombre de cibles atteintes.

1. Donner la loi de X, son espérance et son écart type.
2. Il marque 5 points par cible atteinte et perd 2 points par cible manquée. Exprimer son score G en fonction de X, puis calculer $E(G)$ et $V(G)$.

1. $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0,7) : E(X) = 7$, $V(X) = 2,1$, $\sigma(X) \approx 1,45$.
2. $G = 5X - 2(10 - X) = 7X - 20 : E(G) = 29$, $V(G) = 49 \times 2,1 = 102,9$.

Utiliser un échantillon

Exercice 5.

La masse (en g) d'un paquet de café est une variable aléatoire d'espérance 250 et d'écart type 5. Les masses des paquets sont indépendantes.

1. Un carton contient 12 paquets. Calculer l'espérance et l'écart type de la masse totale S_{12}.
2. On pèse 25 paquets et on calcule leur masse moyenne M_{25}. Calculer $E(M_{25})$ et $\sigma(M_{25})$.
3. Combien de paquets faut-il peser pour que l'écart type de la moyenne soit inférieur ou égal à 0,5 g?

1. $E(S_{12}) = 3\,000$, $\sigma(S_{12}) = 5\sqrt{12} \approx 17,3$.
2. $E(M_{25}) = 250$, $\sigma(M_{25}) = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$.
3. $\frac{5}{\sqrt{n}} \leqslant 0,5 \iff \sqrt{n} \geqslant 10 \iff n \geqslant 100$.