Corrigé
Fonctions trigonométriques

Utiliser le cercle trigonométrique, la parité et la périodicité

Exercice 1.

Donner la valeur exacte de : $\cos\dfrac{5\pi}{6}$; $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\cos\dfrac{7\pi}{3}$; $\sin\dfrac{11\pi}{6}$; $\cos(-3\pi)$.

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=-\frac{1}{2}$; $\cos\pi=-1$.

Exercice 2.

Étudier la parité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, puis montrer que f est périodique de période π.

$$f(x)=\cos(2x) \qquad g(x)=x\sin x \qquad h(x)=\sin x\cos x$$

$f(-x)=\cos(-2x)=f(x)$: paire. $g(-x)=(-x)\times(-\sin x)=g(x)$: paire. $h(-x)=-\sin x\cos x=-h(x)$: impaire.

$f(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos(2x)=f(x)$.

Dériver des fonctions trigonométriques

Exercice 3.

Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=3\cos(2x)-\sin x$
2. $g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x+1\right)$
3. $h(x)=\cos^2 x$
4. $k(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x$

1. $f'(x)=-6\sin(2x)-\cos x$
2. $g'(x)=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x+1\right)$
3. $h'(x)=-2\sin x\cos x$
4. $k'(x)=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$

Exercice 4. [Limites]

À l'aide d'un nombre dérivé, déterminer : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$.

$\frac{\sin(3x)}{x}=3\times\frac{\sin(3x)}{3x}\to 3$. $\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}\to\cos'(0)=-\sin 0=0$.

Résoudre des équations et inéquations trigonométriques

Exercice 5.

Résoudre sur l'intervalle indiqué.

1. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$
2. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$
3. $2\cos x - 1 \geqslant 0$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$
4. $\sin(2x) = 0$ sur $[0\,;\,2\pi[$

1. $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{3\pi}{4}$.
2. $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$.
3. $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$: $\left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$.
4. $2x = k\pi$: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Étudier une fonction trigonométrique

Exercice 6.

Soit $f(x) = \sin x\,(1+\cos x)$ sur $[0\,;\,\pi]$.

1. Montrer que $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,\pi]$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Quelle est la valeur maximale de f ?

1. $f'(x) = \cos x(1+\cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$, et $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.
2. $\cos x + 1 \geqslant 0$; $2\cos x - 1 > 0 \iff x < \frac{\pi}{3}$. f croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$, $f(0) = f(\pi) = 0$.
3. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}30$.

Exercice 7.

On rappelle que $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$. Soit $g(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que g est croissante.
2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

1. $g'(x) = -\sin x + x \geqslant 0$.
2. g croissante et $g(0) = 0$, donc $g(x) \geqslant 0$.