Loi binomiale

Identifier une loi de Bernoulli ou une loi binomiale

Exercice 1.

Dans chaque cas, dire si X suit une loi binomiale ; si oui, préciser ses paramètres.

1. On lance 10 fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de « pile ».
2. Une urne contient 3 boules rouges et 7 noires. On tire successivement et **sans remise** 4 boules ; X est le nombre de boules rouges.
3. Même urne, tirages **avec remise** de 4 boules.
4. On lance un dé jusqu'à obtenir un six ; X est le nombre de lancers.

Déterminer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal

Exercice 2.

1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 7$.
2. En déduire $\binom{6}{3}$, $\binom{7}{5}$ et $\binom{7}{2}$.
3. Combien y a-t-il de chemins réalisant exactement 2 succès dans un arbre de 7 épreuves ?
4. Vérifier que $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \cdots + \binom{5}{5} = 2^5$ et interpréter.

Calculer des probabilités avec une loi binomiale

Exercice 3.

Un QCM comporte 10 questions ; chacune propose 4 réponses dont une seule est juste. Un élève répond au hasard. On note X le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale.
2. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 3)$ à 10^{-3} près.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 5 bonnes réponses.
4. Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 4. [Démonstration]

Soit X suivant $\mathscr{B}(2\,;\,p)$.

1. Donner la loi de X à l'aide d'un arbre.
2. Montrer que $E(X) = 2p$.

Déterminer un intervalle de probabilité donnée

Exercice 5.

Une entreprise affirme que 20 % de ses clients sont mécontents. Sur 150 clients interrogés au hasard, on note X le nombre de mécontents, qui suit $\mathscr{B}(150\,;\,0{,}2)$.

1. Calculer $E(X)$.
2. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
3. Dans l'échantillon, 43 clients se disent mécontents. Que penser de l'affirmation de l'entreprise ?
4. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > s$ lorsque X suit $\mathscr{B}(n\,;\,p)$. Que doit renvoyer `seuil(150, 0.2, 0.025)` ?

```
from math import comb
def seuil(n, p, s):
    k = 0
    F = (1 - p)**n
    while F <= s:
        k = ...
        F = F + ...
    return k
```

Résoudre un problème avec probabilités conditionnelles et espérance

Exercice 6.

Dans un élevage, 8 % des poules sont malades. Un test est positif pour 95 % des poules malades et pour 4 % des poules saines.

1. On teste une poule au hasard. Calculer la probabilité que le test soit positif.
2. Le test est positif. Quelle est la probabilité que la poule soit malade ?
3. On teste 30 poules (choix assimilé à des tirages avec remise). On note Y le nombre de tests positifs. Donner la loi de Y, puis $P(Y \geqslant 1)$ et $E(Y)$.

Corrigé

