Dérivation et convexité

Calculer une dérivée et dresser un tableau de variation

Exercice 1.

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (3x-1)^2$
2. $g(x) = \mathrm{e}^{2x-5}$
3. $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
4. $k(x) = \sqrt{4x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$
5. $m(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
6. $p(x) = (x^2+1)^2$

Exercice 2.

Soit $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Utiliser les limites et les asymptotes

Exercice 3.

Déterminer les limites demandées et en déduire d'éventuelles asymptotes.

1. $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x}$ en $+\infty$ et en 0^+.
2. $g(x) = 5 - 4\mathrm{e}^{-x}$ en $+\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en 2^+ et en 2^-.

Résoudre une équation $f(x) = k$ avec le théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 4.

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$ sur $[0\,;\,2]$.

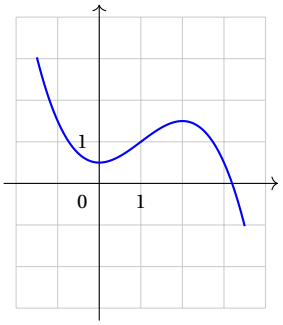
1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;\,2]$.
3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Compléter la fonction Python de dichotomie suivante.

```
def dicho(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if (m**3 + m - 3) * (a**3 + a - 3) <= 0:
            b = ...
        else :
            a = ...
    return a, b
```

Reconnaître graphiquement convexité et point d'inflexion

Exercice 5.

On donne la courbe d'une fonction f définie sur $[-1{,}5\,;\,3{,}5]$.



1. Sur quel intervalle f semble-t-elle convexe ? concave ?
2. Donner les coordonnées du point d'inflexion.
3. Quel est le signe de $f''(0)$? de $f''(3)$?

Étudier la convexité d'une fonction

Exercice 6.

Étudier la convexité des fonctions suivantes et préciser les éventuels points d'inflexion.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. [Économie]

Le coût de production de x centaines d'objets est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$ (en milliers d'euros), pour $x \in [0\,;\,6]$.

1. Montrer que C est croissante sur $[0\,;\,6]$.
2. Étudier la convexité de C. À partir de quelle production le coût marginal $C'(x)$ augmente-t-il ?

Corrigé

