Corrigé
Dérivation et convexité

Calculer une dérivée et dresser un tableau de variation

Exercice 1.

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (3x-1)^2$
2. $g(x) = \mathrm{e}^{2x-5}$
3. $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
4. $k(x) = \sqrt{4x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$
5. $m(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
6. $p(x) = (x^2+1)^2$

1. $f'(x) = 6(3x-1)$
2. $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-5}$
3. $h'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$
4. $k'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$
5. $m'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$
6. $p'(x) = 4x(x^2+1)$

Exercice 2.

Soit $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

1. $f'(x) = \mathrm{e}^x + (x-2)\mathrm{e}^x = (x-1)\mathrm{e}^x$, du signe de $x-1$: f décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$, croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, minimum $f(1) = -\mathrm{e}$.
2. $x-2 \to +\infty$ et $\mathrm{e}^x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Utiliser les limites et les asymptotes

Exercice 3.

Déterminer les limites demandées et en déduire d'éventuelles asymptotes.

1. $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x}$ en $+\infty$ et en 0^+.
2. $g(x) = 5 - 4\mathrm{e}^{-x}$ en $+\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en 2^+ et en 2^-.

1. $\lim\limits_{+\infty} f = 3$: asymptote $y = 3$; $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$: asymptote $x = 0$.
2. $\mathrm{e}^{-x} \to 0$: $\lim g = 5$, asymptote $y = 5$.
3. $+\infty$ en 2^+, $-\infty$ en 2^- : asymptote $x = 2$.

Résoudre une équation $f(x) = k$ avec le théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 4.

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$ sur $[0\,;\,2]$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;\,2]$.
3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Compléter la fonction Python de dichotomie suivante.

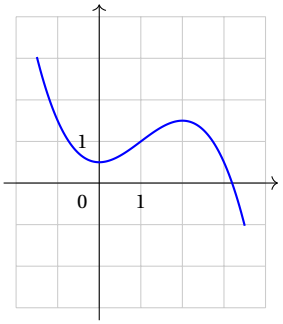
```
def dicho(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if (m**3 + m - 3) * (a**3 + a - 3) <= 0:
            b = ...
        else :
            a = ...
    return a, b
```

1. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f strictement croissante.
2. f est continue, strictement croissante, $f(0) = -3 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$: unique solution d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
3. $1{,}21 < \alpha < 1{,}22$.
4. `b = m` et `a = m`.

Reconnaître graphiquement convexité et point d'inflexion

Exercice 5.

On donne la courbe d'une fonction f définie sur $[-1{,}5\ ;\ 3{,}5]$.



1. Sur quel intervalle f semble-t-elle convexe ? concave ?
2. Donner les coordonnées du point d'inflexion.
3. Quel est le signe de $f''(0)$? de $f''(3)$?

1. Convexe sur $[-1{,}5\ ;\ 1]$, concave sur $[1\ ;\ 3{,}5]$.
2. $(1\ ;\ 1)$.
3. $f''(0) > 0$ (zone convexe) ; $f''(3) < 0$ (zone concave).

Étudier la convexité d'une fonction

Exercice 6.

Étudier la convexité des fonctions suivantes et préciser les éventuels points d'inflexion.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. $f''(x) = 6x - 12$: concave sur $]-\infty\ ;\ 2]$, convexe sur $[2\ ;\ +\infty[$; point d'inflexion $(2\ ;\ -12)$.
2. $g''(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2 > 0$: convexe sur $\mathbb{R}$, pas de point d'inflexion.
3. $h'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$, $h''(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$: concave sur $]-\infty\ ;\ -2]$, convexe sur $[-2\ ;\ +\infty[$; point d'inflexion $(-2\ ;\ -2\mathrm{e}^{-2})$.

Exercice 7. [Économie]

Le coût de production de x centaines d'objets est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$ (en milliers d'euros), pour $x \in [0\ ;\ 6]$.

1. Montrer que C est croissante sur $[0\ ;\ 6]$.
2. Étudier la convexité de C. À partir de quelle production le coût marginal $C'(x)$ augmente-t-il ?

1. $C'(x) = 3x^2 - 12x + 15 = 3(x^2 - 4x + 5)$; discriminant $16 - 20 < 0$, donc $C'(x) > 0$.
2. $C''(x) = 6x - 12$: concave sur $[0\ ;\ 2]$, convexe sur $[2\ ;\ 6]$. Le coût marginal augmente à partir de 200 objets.