Lois à densité

Déterminer si une fonction est une densité de probabilité

Exercice 1.

Dans chaque cas, dire si f est une densité de probabilité sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = \dfrac{3}{8}x^2$ sur $[0\,;\,2]$.
2. $f(x) = 1 - x$ sur $[0\,;\,2]$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

Exercice 2.

Déterminer le réel k pour que $f(x) = k(4-x)$ soit une densité sur $[0\,;\,4]$.

Calculer des probabilités avec une loi à densité

Exercice 3.

X a pour densité $f(x) = \dfrac{3}{8}x^2$ sur $[0\,;\,2]$.

1. Calculer $P(X \leqslant 1)$, $P(X > 1{,}5)$ et $P(X = 1)$.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. Déterminer le réel m tel que $P(X \leqslant m) = 0{,}5$.

Exercice 4. [Loi uniforme]

Un bus passe toutes les 15 minutes. Un voyageur arrive à un instant aléatoire ; son temps d'attente T (en minutes) suit la loi uniforme sur $[0\,;\,15]$.

1. Calculer la probabilité d'attendre moins de 5 minutes, puis entre 3 et 10 minutes.
2. Quel est le temps d'attente moyen ?
3. Écrire une instruction Python simulant T.

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité

Exercice 5.

1. Calculer l'espérance de X de densité $f(x) = \frac{3}{8}x^2$ sur $[0\,;\,2]$.
2. Démontrer que si X suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$, alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Utiliser une loi exponentielle

Exercice 6.

La durée de vie D (en heures) d'un composant suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0005$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne ?
2. Calculer la probabilité que le composant dure plus de 1 000 heures ; entre 1 000 et 3 000 heures.
3. Le composant a déjà fonctionné 2 000 heures. Quelle est la probabilité qu'il dure encore au moins 1 000 heures ?
4. Déterminer t tel que $P(D \leqslant t) = 0{,}5$ (durée de demi-vie).

Exercice 7.

X suit une loi exponentielle telle que $P(X > 2) = 0{,}3$. Déterminer λ, puis $E(X)$.

Corrigé

