Corrigé
Lois à densité

Déterminer si une fonction est une densité de probabilité

Exercice 1.

Dans chaque cas, dire si f est une densité de probabilité sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = \dfrac{3}{8}x^2$ sur $[0\,;\,2]$.
2. $f(x) = 1 - x$ sur $[0\,;\,2]$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

1. Positive, $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{8}\right]_0^2 = 1$: oui.
2. Négative sur $]1\,;\,2]$: non.
3. Positive, $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1$: oui.

Exercice 2.

Déterminer le réel k pour que $f(x) = k(4-x)$ soit une densité sur $[0\,;\,4]$.

$\displaystyle\int_0^4 k(4-x)\,\mathrm{d}x = k\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8k = 1 : k = \frac{1}{8}$ (et $f \geqslant 0$ sur $[0\,;\,4]$).

Calculer des probabilités avec une loi à densité

Exercice 3.

X a pour densité $f(x) = \dfrac{3}{8}x^2$ sur $[0\,;\,2]$.

1. Calculer $P(X \leqslant 1)$, $P(X > 1{,}5)$ et $P(X = 1)$.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. Déterminer le réel m tel que $P(X \leqslant m) = 0{,}5$.

1. $P(X \leqslant 1) = \dfrac{1}{8}$; $P(X > 1{,}5) = 1 - \dfrac{1{,}5^3}{8} \approx 0{,}578$; $P(X = 1) = 0$.
2. $F(x) = \dfrac{x^3}{8}$ sur $[0\,;\,2]$.
3. $m^3 = 4 : m = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$.

Exercice 4. [Loi uniforme]

Un bus passe toutes les 15 minutes. Un voyageur arrive à un instant aléatoire ; son temps d'attente T (en minutes) suit la loi uniforme sur $[0\,;\,15]$.

1. Calculer la probabilité d'attendre moins de 5 minutes, puis entre 3 et 10 minutes.
2. Quel est le temps d'attente moyen ?
3. Écrire une instruction Python simulant T.

1. $\dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{7}{15}$.
2. $E(T) = 7{,}5$ min.
3. `T = 15 * random()`.

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité

Exercice 5.

1. Calculer l'espérance de X de densité $f(x) = \dfrac{3}{8}x^2$ sur $[0\,;\,2]$.
2. Démontrer que si X suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

1. $E(X) = \displaystyle\int_0^2 \frac{3}{8}x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3x^4}{32}\right]_0^2 = \frac{3}{2}$.
2. $E(X) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$.

Utiliser une loi exponentielle

Exercice 6.

La durée de vie D (en heures) d'un composant suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0005$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne ?
2. Calculer la probabilité que le composant dure plus de 1 000 heures ; entre 1 000 et 3 000 heures.
3. Le composant a déjà fonctionné 2 000 heures. Quelle est la probabilité qu'il dure encore au moins 1 000 heures ?
4. Déterminer t tel que $P(D \leqslant t) = 0{,}5$ (durée de demi-vie).

1. $\dfrac{1}{0{,}0005} = 2\,000$ h.
2. $P(D > 1\,000) = \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}607$; $P(1\,000 \leqslant D \leqslant 3\,000) = \mathrm{e}^{-0{,}5} - \mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 0{,}383$.
3. Absence de mémoire : $P(D > 1\,000) \approx 0{,}607$.
4. $1 - \mathrm{e}^{-0{,}0005t} = 0{,}5 \iff t = \dfrac{\ln 2}{0{,}0005} \approx 1\,386$ h.

Exercice 7.

X suit une loi exponentielle telle que $P(X > 2) = 0{,}3$. Déterminer λ, puis $E(X)$.

$\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0{,}3 : \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}3}{2} \approx 0{,}602$; $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 1{,}66$.