Équations différentielles

Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Exercice 1.

Dans chaque cas, vérifier que f est solution de l'équation donnée.

1. $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}$ et $y' + 2y = 0$.
2. $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ et $y' - y = 1 - x$.
3. $f(x) = x\mathrm{e}^x$ et $y' - y = \mathrm{e}^x$.
4. $f(x) = \ln x$ et $xy' = 1$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Résoudre une équation différentielle $y' = ay$

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer la solution vérifiant la condition donnée.

1. $y' = 4y$ et $y(0) = 2$.
2. $y' = -0{,}5y$ et $y(2) = 3$.
3. $3y' + y = 0$ et $y(0) = -1$.

Exercice 3. [Radioactivité]

Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs d'un échantillon vérifie $N' = -\lambda N$, avec $\lambda = 0{,}000121$ par an (carbone 14) et $N(0) = N_0$.

1. Exprimer $N(t)$.
2. Calculer la demi-vie T du carbone 14, c'est-à-dire la durée au bout de laquelle $N(T) = \dfrac{N_0}{2}$.
3. Un fossile contient 30 % du carbone 14 initial. Estimer son âge.

Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$

Exercice 4.

1. Résoudre $y' = 2y - 6$ et donner la solution telle que $y(0) = 5$.
2. Résoudre $y' + 3y = 12$ et donner la solution telle que $y(0) = 0$.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de la solution trouvée à la question 2.

Exercice 5. [Électricité]

Lors de la charge d'un condensateur, la tension u (en volts) vérifie $0{,}5u' + u = 10$, avec $u(0) = 0$, t en secondes.

1. Montrer que l'équation s'écrit $u' = -2u + 20$, puis la résoudre.
2. Exprimer $u(t)$ et étudier ses variations et sa limite.
3. Au bout de combien de temps la tension atteint-elle 95 % de sa valeur limite ?

Approcher une solution par la méthode d'Euler

Exercice 6.

On considère l'équation $y' = -2y + 20$ avec $y(0) = 0$ (exercice 5).

1. Avec un pas $h = 0{,}1$, calculer à la main les deux premières valeurs approchées $y(0{,}1)$ et $y(0{,}2)$.
2. Que renvoie `euler(-2, 20, 0, 0.1, 10)` (fonction du cours) ? Comparer avec la valeur exacte $u(1)$.
3. Compléter la fonction `euler(a, b, y0, h, n)` du cours, qui applique n fois la méthode d'Euler de pas h à l'équation $y' = ay + b$ avec $y(0) = y_0$.

```
def euler(a, b, y0, h, n):
    y = y0
    for i in range(n):
        y = y + h * ( ... )
    return y
```

Corrigé

