Corrigé

Équations différentielles

Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Exercice 1.

Dans chaque cas, vérifier que f est solution de l'équation donnée.

1. $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}$ et $y' + 2y = 0$.
2. $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ et $y' - y = 1 - x$.
3. $f(x) = x\mathrm{e}^x$ et $y' - y = \mathrm{e}^x$.
4. $f(x) = \ln x$ et $xy' = 1$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. $f'(x) = -6\mathrm{e}^{-2x}$ et $f' + 2f = 0$.
2. $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et $f' - f = 1 - x$.
3. $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ et $f' - f = \mathrm{e}^x$.
4. $x \times \dfrac{1}{x} = 1$.

Résoudre une équation différentielle $y' = ay$

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer la solution vérifiant la condition donnée.

1. $y' = 4y$ et $y(0) = 2$.
2. $y' = -0{,}5y$ et $y(2) = 3$.
3. $3y' + y = 0$ et $y(0) = -1$.

1. $y = C\mathrm{e}^{4x}$; $y = 2\mathrm{e}^{4x}$.
2. $y = C\mathrm{e}^{-0{,}5x}$; $C\mathrm{e}^{-1} = 3$: $y = 3\mathrm{e}^{1-0{,}5x}$.
3. $y' = -\dfrac{1}{3}y$: $y = C\mathrm{e}^{-x/3}$; $y = -\mathrm{e}^{-x/3}$.

Exercice 3. [Radioactivité]

Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs d'un échantillon vérifie $N' = -\lambda N$, avec $\lambda = 0{,}000121$ par an (carbone 14) et $N(0) = N_0$.

1. Exprimer $N(t)$.
2. Calculer la demi-vie T du carbone 14, c'est-à-dire la durée au bout de laquelle $N(T) = \dfrac{N_0}{2}$.
3. Un fossile contient 30 % du carbone 14 initial. Estimer son âge.

1. $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-0{,}000121t}$.
2. $\mathrm{e}^{-\lambda T} = \dfrac{1}{2} : T = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx 5\,728$ ans.
3. $\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0{,}3 : t = -\dfrac{\ln 0{,}3}{\lambda} \approx 9\,950$ ans.

Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$

Exercice 4.

1. Résoudre $y' = 2y - 6$ et donner la solution telle que $y(0) = 5$.
2. Résoudre $y' + 3y = 12$ et donner la solution telle que $y(0) = 0$.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de la solution trouvée à la question 2.

1. Solution constante 3 ; $y = C\mathrm{e}^{2x} + 3$; $C = 2 : y = 2\mathrm{e}^{2x} + 3$.
2. $y' = -3y + 12$: solution constante 4 ; $y = C\mathrm{e}^{-3x} + 4$; $C = -4 : y = 4 - 4\mathrm{e}^{-3x}$.
3. 4.

Exercice 5. [Électricité]

Lors de la charge d'un condensateur, la tension u (en volts) vérifie $0{,}5u' + u = 10$, avec $u(0) = 0$, t en secondes.

1. Montrer que l'équation s'écrit $u' = -2u + 20$, puis la résoudre.
2. Exprimer $u(t)$ et étudier ses variations et sa limite.
3. Au bout de combien de temps la tension atteint-elle 95 % de sa valeur limite ?

1. On divise par 0,5. Solutions : $u(t) = C\mathrm{e}^{-2t} + 10$.
2. $u(t) = 10 - 10\mathrm{e}^{-2t}$; $u'(t) = 20\mathrm{e}^{-2t} > 0$: croissante ; limite 10 V.
3. $\mathrm{e}^{-2t} = 0{,}05 : t = \dfrac{\ln 20}{2} \approx 1{,}50$ s.

Approcher une solution par la méthode d'Euler

Exercice 6.

On considère l'équation $y' = -2y + 20$ avec $y(0) = 0$ (exercice 5).

1. Avec un pas $h = 0{,}1$, calculer à la main les deux premières valeurs approchées $y(0{,}1)$ et $y(0{,}2)$.
2. Que renvoie `euler(-2, 20, 0, 0.1, 10)` (fonction du cours) ? Comparer avec la valeur exacte $u(1)$.
3. Compléter la fonction `euler(a, b, y0, h, n)` du cours, qui applique n fois la méthode d'Euler de pas h à l'équation $y' = ay + b$ avec $y(0) = y_0$.

```
def euler(a, b, y0, h, n):
    y = y0
    for i in range(n):
        y = y + h * ( ... )
    return y
```

1. $y(0{,}1) \approx 0 + 0{,}1 \times 20 = 2$; $y(0{,}2) \approx 2 + 0{,}1 \times (-4 + 20) = 3{,}6$.
2. Environ 8,93 ; valeur exacte $u(1) = 10 - 10\mathrm{e}^{-2} \approx 8{,}65$. Un pas plus petit améliore l'approximation.
3. À chaque étape, $y(t+h) \approx y(t) + h\,y'(t) = y(t) + h\big(ay(t) + b\big)$:

```
def euler(a, b, y0, h, n):
    y = y0
    for i in range(n):
        y = y + h * (a * y + b)
    return y
```