Corrigé
Loi géométrique

Identifier une loi géométrique

Exercice 1.

Dans chaque cas, dire si X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

1. Un basketteur réussit chaque lancer franc avec probabilité 0,7, indépendamment. X est le rang de son premier panier.
2. On tire au hasard, avec remise, une carte dans un jeu de 32 cartes jusqu'à obtenir un as. X est le nombre de tirages.
3. On tire sans remise une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 8 blanches jusqu'à obtenir une rouge.
4. On lance 20 fois une pièce ; X est le nombre de « face ».

1. $\mathscr{G}(0{,}7)$.
2. $\mathscr{G}\left(\frac{4}{32}\right) = \mathscr{G}(0{,}125)$.
3. Non : tirages non indépendants.
4. Non : loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}5)$.

Calculer des probabilités avec une loi géométrique

Exercice 2.

Une application de rencontre sportive propose un partenaire compatible avec une probabilité de 0,15 à chaque proposition, indépendamment. On note X le rang de la première proposition compatible.

1. Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 4)$.
2. Calculer la probabilité qu'il faille plus de 5 propositions.
3. Calculer $P(X \leqslant 10)$.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$.

1. $P(X = 1) = 0{,}15$; $P(X = 4) = 0{,}85^3 \times 0{,}15 \approx 0{,}092$.
2. $P(X > 5) = 0{,}85^5 \approx 0{,}444$.
3. $1 - 0{,}85^{10} \approx 0{,}803$.
4. $0{,}85^n \leqslant 0{,}1 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}85} \approx 14{,}2$: $n = 15$.

Exercice 3.

Soit X suivant $\mathscr{G}(p)$. Montrer que $P(X \leqslant k) = 1-(1-p)^k$ de deux façons : en utilisant $P(X > k)$, puis en sommant les termes d'une suite géométrique.

$P(X \leqslant k) = 1 - P(X > k) = 1-(1-p)^k$.

$$\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i-1}p = \frac{(1-p)^k p - p}{(1-p)-1} = \frac{(1-p)^k p - p}{-p} = 1-(1-p)^k.$$

Utiliser l'espérance d'une loi géométrique

Exercice 4.

Un jeu de grattage est gagnant avec probabilité 0,05. Un ticket coûte 2 €.

1. En moyenne, combien de tickets faut-il acheter pour obtenir le premier ticket gagnant ? Quelle dépense cela représente-t-il ?
2. Un ticket gagnant rapporte 30 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

1. $E(X) = \dfrac{1}{0{,}05} = 20$ tickets, soit 40 € en moyenne.
2. En moyenne, on dépense 40 € pour gagner 30 € : le jeu est défavorable.

Utiliser l'absence de mémoire

Exercice 5.

On reprend le basketteur de l'exercice 1 ($p = 0{,}7$).

1. Il a raté ses 3 premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il rate encore les 2 suivants ?
2. Comparer avec la probabilité de rater ses 2 premiers lancers. Commenter.
3. Un joueur de loto dit : « Le 7 n'est pas sorti depuis 20 tirages, il va forcément sortir bientôt. » Qu'en penser ?

1. $P_{(X>3)}(X > 5) = P(X > 2) = 0{,}3^2 = 0{,}09$.
2. Même probabilité 0,09 : les échecs passés n'influencent pas la suite.
3. Faux : les tirages étant indépendants, l'attente restante a la même loi qu'au départ (absence de mémoire).

Exercice 6. [Simulation]

1. Écrire une fonction moyenne(p, N) qui appelle N fois la fonction du cours rang_premier_succes(p), puis renvoie la moyenne des résultats.
2. Quelle valeur attend-on pour moyenne(0.2, 10000) ?

```
def moyenne(p, N):
    s = 0
    for i in range(N):
        s = s + rang_premier_succes(p)
    return s / N
```

Une valeur proche de $\frac{1}{0{,}2} = 5$.