Primitives et intégration

Déterminer des primitives

Exercice 1.

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$ sur $\mathbb{R}$

2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

3. $h(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$

4. $k(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$

5. $m(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

6. $p(x) = 4(2x+1)$ sur $\mathbb{R}$

7. $q(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$

8. $r(x) = \dfrac{5}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

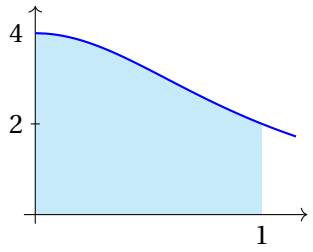
Exercice 2.

Déterminer la primitive F de $f(x) = 6x^2 - 2x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 4$.

Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale

Exercice 3.

On a tracé la courbe de $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$ sur $[0\,;\,1]$ et on note $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.



1. Justifier que $2 \leqslant f(x) \leqslant 4$ sur $[0\,;\,1]$ et en déduire un encadrement de I.

2. Avec la fonction `rectangles` du cours et $n = 1000$, on obtient 3,1426. Quelle constante célèbre semble approcher I ?

3. La fonction `rectangles(f, a, b, n)` du cours renvoie la somme des aires de n rectangles de largeur $\frac{b-a}{n}$, de hauteur la valeur de f à gauche. Compléter son code.

```
def f(x):
    return 4 / (1 + x**2)
def rectangles(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + ...
    return s
```

Calculer une intégrale ou une valeur moyenne

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3+x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 5.

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;\,2]$, puis de $g(x) = x^2 - 2x$ sur $[0\,;\,3]$.

Calculer l'aire sous une courbe ou entre deux courbes

Exercice 6.

Soit $f(x) = -x^2 + 4x$ et $g(x) = x$.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

2. Vérifier que $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[0\,;\,3]$.

3. Calculer l'aire du domaine compris entre les deux courbes, en unités d'aire.

Interpréter une intégrale en contexte

Exercice 7. [Physique]

La vitesse d'un mobile (en m/s) est $v(t) = 2t + 1$ pour $t \in [0\,;\,10]$ (t en secondes). La distance parcourue entre $t = a$ et $t = b$ est $\displaystyle\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer la distance parcourue pendant les 10 premières secondes.

2. Calculer la vitesse moyenne sur $[0\,;\,10]$.

Exercice 8. [Économie]

Le coût marginal de production (en € par unité) est $C_m(q) = 0{,}03q^2 + 5$. Le coût total de production des unités 10 à 20 est $\displaystyle\int_{10}^{20} C_m(q)\,\mathrm{d}q$. Le calculer.

Corrigé