Fonction logarithme népérien

Utiliser les propriétés algébriques du logarithme

Exercice 1.

Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

1. $\ln 6$
2. $\ln \dfrac{9}{2}$
3. $\ln 16$
4. $\ln \sqrt{12}$
5. $\ln \dfrac{1}{24}$
6. $\ln(4\mathrm{e}^2)$

Exercice 2.

Simplifier : $A = \ln(\mathrm{e}^5) - \mathrm{e}^{\ln 4}$; $B = \ln(x^2) - 2\ln x$ pour $x > 0$; $C = \ln(\sqrt{5}+1) + \ln(\sqrt{5}-1)$.

Résoudre des équations et inéquations avec le logarithme

Exercice 3.

Résoudre (en précisant l'ensemble de résolution pour les logarithmes).

1. $\mathrm{e}^x = 5$
2. $\ln x = -2$
3. $\mathrm{e}^{2x+1} \leqslant 3$
4. $\ln(2x-1) > 0$
5. $\ln(x+3) = \ln(2x)$
6. $3 \times 1{,}05^x \geqslant 6$

Déterminer un seuil à l'aide du logarithme

Exercice 4.

1. Déterminer le plus petit entier n tel que $1{,}02^n > 2$. Interpréter pour un placement à 2 % par an.
2. Une voiture perd 15 % de sa valeur chaque année. Au bout de combien d'années vaut-elle moins du quart de sa valeur initiale ?
3. On reprend la suite $q_n = 5 - 0{,}8^n$ (chapitre 1). Déterminer par le calcul le plus petit n tel que $q_n > 4{,}99$.

Étudier une fonction faisant intervenir le logarithme

Exercice 5.

Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 3\ln x - x$ sur $]0\,;\,+\infty[$
2. $g(x) = x\ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$
3. $h(x) = \ln(3x+2)$ sur $\left]-\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$
4. $k(x) = \ln(x^2+4)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6.

Soit $f(x) = 3\ln x - x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Dresser le tableau de variation de f (on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$). Préciser la limite en 0.
2. Montrer que f est concave.
3. Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions ? Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune.

Exercice 7. [Algorithme de Briggs]

Pour calculer $\ln a$ ($a > 0$), Briggs prend des racines carrées successives : $\sqrt{a}$, $\sqrt{\sqrt{a}}$, ... jusqu'à obtenir un nombre b très proche de 1, puis utilise $\ln b \approx b - 1$.

1. Justifier que si $b = a^{1/2^n}$, alors $\ln a = 2^n \ln b$.
2. Compléter le programme pour qu'il renvoie une valeur approchée de $\ln a$.

```
from math import sqrt
def briggs(a, n):
    b = a
    for k in range(n):
        b = sqrt(b)
    return ...
```

3. Que renvoie $\text{briggs}(2,\ 20)$? Comparer avec $\ln 2$.

Corrigé

