Suites

Modéliser un problème par une suite

Exercice 1.

Un étudiant place 2 000 € le 1er janvier 2026 sur un livret rémunéré à 3 % par an (intérêts composés). On note u_n le capital au 1er janvier 2026 + n.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis u_n en fonction de n.
2. Calculer le capital au 1er janvier 2036, arrondi au centime.
3. Une autre offre ajoute chaque année 70 € fixes au capital (sans intérêts). On note w_n ce capital. Exprimer w_n en fonction de n et comparer les deux offres au bout de 10 ans.
4. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le nombre d'années à partir duquel le livret à intérêts composés redevient le plus avantageux. Quelle valeur est affichée ?

```
u = 2000
w = 2000
n = 0
while u <= w:
    n = n + 1
    u = ...
    w = ...
print(n)
```

Exercice 2.

Un patient reçoit une injection de 4 mL de médicament. Chaque heure, 20 % de la quantité présente est éliminée, puis on réinjecte 1 mL. On note q_n la quantité (en mL) présente après n heures, $q_0 = 4$.

1. Justifier que $q_{n+1} = 0{,}8q_n + 1$.
2. Calculer q_1 et q_2.

Calculer une limite de suite géométrique ou d'une somme géométrique

Exercice 3.

Déterminer la limite des suites suivantes.

1. $a_n = 3 \times 1{,}2^n$
2. $b_n = 5 - 2 \times 0{,}7^n$
3. $c_n = \dfrac{4}{3^n}$
4. $d_n = 1 + 0{,}5 + 0{,}5^2 + \cdots + 0{,}5^n$
5. $e_n = 2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \cdots + \dfrac{2}{3^n}$
6. $f_n = 0{,}9^n - 1{,}1^n$

Exercice 4. [Figure fractale]

On construit une figure par étapes : à l'étape 0, un carré d'aire 1. À chaque étape, on ajoute des carrés dont l'aire totale est le quart de l'aire ajoutée à l'étape précédente ; à l'étape 1, on ajoute une aire de 0,5.

1. Exprimer l'aire totale A_n après l'étape n sous forme d'une somme.
2. Déterminer la limite de A_n.
3. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie A_n. Calculer `aire(10)` et `aire(20)`. Ces valeurs sont-elles cohérentes avec la question précédente ?

```
def aire(n):
    A = 1
    a = 0.5
    for i in range(n):
        A = ...
        a = ...
    return A
```

Représenter graphiquement une suite récurrente et conjecturer

Exercice 5.

Soit $f(x) = \sqrt{x+6}$ et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Tracer la courbe de f sur $[0\,;\,5]$ et la droite $y = x$ (unité 2 cm).
2. Construire u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses.
3. Conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n). Vérifier avec la calculatrice.

Étudier une suite arithmético-géométrique

Exercice 6.

On reprend l'exercice 2 : $q_0 = 4$ et $q_{n+1} = 0{,}8q_n + 1$.

1. Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = 0{,}8\ell + 1$.
2. On pose $v_n = q_n - \ell$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire q_n en fonction de n, puis la limite de (q_n). Interpréter.
4. Compléter le programme suivant pour qu'il affiche le nombre d'heures au bout duquel la quantité dépasse 4,9 mL.

```
q, n = 4, 0
while ...:
    q = ...
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice 7.

Un lac contient 3 000 truites. Chaque année, la population diminue de 10 % et on introduit 200 truites. On note t_n le nombre de truites l'année $2026 + n$.

1. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.
2. Montrer que $t_n = 2\,000 + 1\,000 \times 0{,}9^n$.
3. Quelle est l'évolution de la population à long terme ?

Corrigé