Corrigé
Suites

Modéliser un problème par une suite

Exercice 1.

Un étudiant place 2 000 € le 1er janvier 2026 sur un livret rémunéré à 3 % par an (intérêts composés). On note u_n le capital au 1er janvier 2026 + n.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis u_n en fonction de n.
2. Calculer le capital au 1er janvier 2036, arrondi au centime.
3. Une autre offre ajoute chaque année 70 € fixes au capital (sans intérêts). On note w_n ce capital. Exprimer w_n en fonction de n et comparer les deux offres au bout de 10 ans.
4. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le nombre d'années à partir duquel le livret à intérêts composés redevient le plus avantageux. Quelle valeur est affichée ?

1. $u_{n+1} = 1{,}03u_n$: suite géométrique, $u_n = 2\,000 \times 1{,}03^n$.
2. $u_{10} = 2\,000 \times 1{,}03^{10} \approx 2\,687{,}83$ €.
3. $w_n = 2\,000 + 70n$; $w_{10} = 2\,700$ € : la seconde offre est légèrement meilleure à 10 ans (mais pas à long terme).
4. On calcule les deux capitaux année après année tant que $u_n \leqslant w_n$:

```
u = 2000
w = 2000
n = 0
while u <= w:
    n = n + 1
    u = 1.03 * u
    w = w + 70
print(n)
```

L'algorithme affiche 12 : $u_{11} \approx 2\,768{,}47 < w_{11} = 2\,770$ et $u_{12} \approx 2\,851{,}52 > w_{12} = 2\,840$.

Exercice 2.

Un patient reçoit une injection de 4 mL de médicament. Chaque heure, 20 % de la quantité présente est éliminée, puis on réinjecte 1 mL. On note q_n la quantité (en mL) présente après n heures, $q_0 = 4$.

1. Justifier que $q_{n+1} = 0{,}8q_n + 1$.
2. Calculer q_1 et q_2.

1. On garde 80 % de q_n, puis on ajoute 1 mL.
2. $q_1 = 4{,}2$; $q_2 = 4{,}36$.

Calculer une limite de suite géométrique ou d'une somme géométrique

Exercice 3.

Déterminer la limite des suites suivantes.

1. $a_n = 3 \times 1{,}2^n$
2. $b_n = 5 - 2 \times 0{,}7^n$
3. $c_n = \dfrac{4}{3^n}$
4. $d_n = 1 + 0{,}5 + 0{,}5^2 + \cdots + 0{,}5^n$
5. $e_n = 2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \cdots + \dfrac{2}{3^n}$
6. $f_n = 0{,}9^n - 1{,}1^n$

1. $1{,}2 > 1 : +\infty$.
2. $0{,}7^n \to 0 : 5$.
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0 : 0$.
4. $d_n = \dfrac{0{,}5^{n+1} - 1}{0{,}5 - 1} \to \dfrac{0-1}{-0{,}5} = 2$.
5. $e_n = \dfrac{\frac{2}{3^{n+1}} - 2}{\frac{1}{3} - 1} \to \dfrac{0-2}{-\frac{2}{3}} = 3$.
6. $0 - \infty = -\infty$.

Exercice 4. [Figure fractale]

On construit une figure par étapes : à l'étape 0, un carré d'aire 1. À chaque étape, on ajoute des carrés dont l'aire totale est le quart de l'aire ajoutée à l'étape précédente ; à l'étape 1, on ajoute une aire de 0,5.

1. Exprimer l'aire totale A_n après l'étape n sous forme d'une somme.
2. Déterminer la limite de A_n.
3. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie A_n. Calculer `aire(10)` et `aire(20)`. Ces valeurs sont-elles cohérentes avec la question précédente ?

1. $A_n = 1 + 0{,}5\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)$.

2. $A_n = 1 + 0{,}5 \times \dfrac{\frac{1}{4^n} - 1}{\frac{1}{4} - 1} \to 1 + 0{,}5 \times \dfrac{0-1}{-\frac{3}{4}} = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$.

3. La variable a contient l'aire ajoutée à chaque étape, divisée par 4 d'une étape à la suivante :

```
def aire(n):
    A = 1
    a = 0.5
    for i in range(n):
        A = A + a
        a = a / 4
    return A
```

`aire(10)` $\approx 1{,}6666660$ et `aire(20)` $\approx 1{,}6666666667$: les valeurs se rapprochent de $\dfrac{5}{3} \approx 1{,}6667$, ce qui est cohérent.

Représenter graphiquement une suite récurrente et conjecturer

Exercice 5.

Soit $f(x) = \sqrt{x+6}$ et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Tracer la courbe de f sur $[0\,;\,5]$ et la droite $y = x$ (unité 2 cm).
2. Construire u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses.
3. Conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n). Vérifier avec la calculatrice.

1. Courbe de f : passe par $(0\,;\,\sqrt{6})$, $(3\,;\,3)$ et $(5\,;\,\sqrt{11})$.
2. Construction en escalier entre la courbe et la droite.
3. $u_1 \approx 2{,}449$, $u_2 \approx 2{,}907$, $u_3 \approx 2{,}984$: la suite semble croissante et converger vers 3 (abscisse du point d'intersection, $\sqrt{x+6} = x$ donne $x = 3$).

Étudier une suite arithmético-géométrique

Exercice 6.

On reprend l'exercice 2 : $q_0 = 4$ et $q_{n+1} = 0{,}8q_n + 1$.

1. Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = 0{,}8\ell + 1$.
2. On pose $v_n = q_n - \ell$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire q_n en fonction de n, puis la limite de (q_n). Interpréter.
4. Compléter le programme suivant pour qu'il affiche le nombre d'heures au bout duquel la quantité dépasse 4,9 mL.

```
q, n = 4, 0
while ...:
    q = ...
    n = n + 1
print(n)
```

1. $0{,}2\ell = 1 : \ell = 5$.
2. $v_{n+1} = 0{,}8q_n + 1 - 5 = 0{,}8(q_n - 5) = 0{,}8v_n$: géométrique de raison 0,8, $v_0 = -1$.
3. $q_n = 5 - 0{,}8^n$; $\lim q_n = 5$: la quantité se stabilise vers 5 mL.
4. `while q <= 4.9:` et `q = 0.8 * q + 1` ; on obtient $n = 11$ ($0{,}8^{11} \approx 0{,}086$).

Exercice 7.

Un lac contient 3 000 truites. Chaque année, la population diminue de 10 % et on introduit 200 truites. On note t_n le nombre de truites l'année $2026 + n$.

1. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.
2. Montrer que $t_n = 2\,000 + 1\,000 \times 0{,}9^n$.
3. Quelle est l'évolution de la population à long terme ?

1. $t_{n+1} = 0{,}9t_n + 200$.
2. $\ell = 0{,}9\ell + 200$ donne $\ell = 2\,000$; $v_n = t_n - 2\,000$ est géométrique de raison 0,9 et $v_0 = 1\,000$.
3. $0{,}9^n \to 0$: la population diminue vers 2 000 truites.