Corrigé

Nombres complexes : point de vue algébrique

Calculer avec la forme algébrique

Exercice 1.

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (3-2\mathrm{i})(4+\mathrm{i})$

2. $z_2 = (2-\mathrm{i})^2$

3. $z_3 = (1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})$

4. $z_4 = \mathrm{i}^{2027}$

5. $z_5 = (1+\mathrm{i})^2 - (1-\mathrm{i})^2$

6. $z_6 = \mathrm{i}(3+\mathrm{i}) - 2(1-\mathrm{i})$

1. $14-5\mathrm{i}$

2. $3-4\mathrm{i}$

3. 5

4. $2027 = 4\times 506 + 3 : -\mathrm{i}$

5. $2\mathrm{i} - (-2\mathrm{i}) = 4\mathrm{i}$

6. $3\mathrm{i} - 1 - 2 + 2\mathrm{i} = -3 + 5\mathrm{i}$

Exercice 2.

Pour quelles valeurs du réel x le nombre $z = (x+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$ est-il réel? imaginaire pur?

$z = (x-2) + (2x+1)\mathrm{i}$. Réel si $x = -\frac{1}{2}$; imaginaire pur si $x = 2$.

Utiliser le conjugué et calculer un quotient

Exercice 3.

Donner la forme algébrique de : $\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$; $\dfrac{4-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$; $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$; $\dfrac{2}{\mathrm{i}}$.

$\frac{2-\mathrm{i}}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$; $\frac{(4-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5} = \frac{-2-11\mathrm{i}}{5}$; $\frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}$; $\frac{2(-\mathrm{i})}{1} = -2\mathrm{i}$.

Exercice 4.

Soit z un nombre complexe. On pose $Z = z^2 + \overline{z}^2$ et $W = z - \overline{z}$.

1. Montrer que Z est réel en calculant $\overline{Z}$.

2. Montrer que W est imaginaire pur.

3. Vérifier ces résultats avec $z = 2+3\mathrm{i}$.

1. $\overline{Z} = \overline{z}^2 + z^2 = Z$.

2. $\overline{W} = \overline{z} - z = -W$.

3. $z^2 = -5+12\mathrm{i}$, $\overline{z}^2 = -5-12\mathrm{i}$: $Z = -10$; $W = 6\mathrm{i}$.

Résoudre une équation dans l'ensemble des complexes

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $2z+3\mathrm{i}=5-z$

2. $\mathrm{i}z+2=3-\mathrm{i}$

3. $(2-\mathrm{i})z=1+3\mathrm{i}$

4. $2z+\overline{z}=6-2\mathrm{i}$

1. $3z=5-3\mathrm{i}$: $z=\frac{5}{3}-\mathrm{i}$.

2. $z=\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=-1-\mathrm{i}$.

3. $z=\frac{(1+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5}=\frac{-1+7\mathrm{i}}{5}$.

4. $z=x+\mathrm{i}y$: $3x+\mathrm{i}y=6-2\mathrm{i}$, $x=2$, $y=-2$: $z=2-2\mathrm{i}$.

Utiliser la formule du binôme

Exercice 6.

1. Développer $(2-\mathrm{i})^3$ à l'aide de la formule du binôme.

2. Calculer $(1+\mathrm{i})^4$, puis en déduire $(1+\mathrm{i})^5$ et $(1+\mathrm{i})^{20}$.

1. $8-3\times 4\mathrm{i}+3\times 2\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3=8-12\mathrm{i}-6+\mathrm{i}=2-11\mathrm{i}$.

2. $(1+\mathrm{i})^4=-4$; $(1+\mathrm{i})^5=-4-4\mathrm{i}$; $(1+\mathrm{i})^{20}=(-4)^5=-1\,024$.