Nombres complexes : équations et polynômes

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et factoriser le polynôme associé.

1. $z^2+9=0$
2. $z^2+z+1=0$
3. $2z^2-6z+5=0$
4. $z^2-4z+13=0$

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\sqrt{3}\,z+4=0$.
2. Écrire les solutions sous forme exponentielle et placer leurs points images A et B.
3. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 3.

Soit $P(z)=z^3-z^2+2$.

1. Calculer $P(-1)$.
2. Déterminer les réels a, b, c tels que $P(z)=(z+1)(az^2+bz+c)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4+3z^2-4=0$ (on pourra poser $Z=z^2$), puis $z^4-1=0$.

Factoriser une expression du type $a^n - b^n$

Exercice 5.

1. Factoriser $z^3 - 27$ puis $z^5 - 1$ par $z - a$ pour une valeur de a à préciser.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^3 = 27$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $7^n - 1$ est divisible par 6.

Déterminer les racines n-ièmes de l'unité

Exercice 6.

1. Déterminer les racines quatrièmes et sixièmes de l'unité sous forme algébrique.
2. Placer les racines sixièmes dans le plan complexe. Quelle figure obtient-on ?
3. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ en utilisant la factorisation de $\omega^5 - 1$.

Exercice 7. [Approfondissement]

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8\mathrm{i}$ en cherchant les solutions sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
2. Vérifier que $-2\mathrm{i}$ est l'une des solutions.

Corrigé

