Corrigé

Nombres complexes : équations et polynômes

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et factoriser le polynôme associé.

1. $z^2+9=0$
2. $z^2+z+1=0$
3. $2z^2-6z+5=0$
4. $z^2-4z+13=0$

1. $\pm 3\mathrm{i}$: $z^2+9=(z-3\mathrm{i})(z+3\mathrm{i})$.
2. $\Delta=-3$: $z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, soit j et $\overline{j}$; $z^2+z+1=(z-j)(z-\overline{j})$.
3. $\Delta=-4$: $z=\dfrac{6\pm 2\mathrm{i}}{4}=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$; $2z^2-6z+5=2\left(z-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$.
4. $\Delta=-36$: $z=2\pm 3\mathrm{i}$; $z^2-4z+13=(z-2-3\mathrm{i})(z-2+3\mathrm{i})$.

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.
2. Écrire les solutions sous forme exponentielle et placer leurs points images A et B.
3. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

1. $\Delta=12-16=-4$: $z=\sqrt{3}\pm\mathrm{i}$.
2. $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
3. $OA=OB=2$ et $AB=|2\mathrm{i}|=2$.

Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 3.

Soit $P(z) = z^3 - z^2 + 2$.

1. Calculer $P(-1)$.
2. Déterminer les réels a, b, c tels que $P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

1. $P(-1) = -1 - 1 + 2 = 0$.
2. $(z+1)(az^2+bz+c) = az^3 + (a+b)z^2 + (b+c)z + c$: $a = 1$, $a+b = -1$, $b+c = 0$, $c = 2$, d'où $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$.
3. $z^2 - 2z + 2 = 0$: $\Delta = -4$, $z = 1 \pm \mathrm{i}$. $\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 1-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\}$.

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$ (on pourra poser $Z = z^2$), puis $z^4 - 1 = 0$.

$Z^2 + 3Z - 4 = 0$: $Z = 1$ ou $Z = -4$. $z^2 = 1$ donne ± 1 ; $z^2 = -4$ donne $\pm 2\mathrm{i}$. $\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 1\ ;\ -2\mathrm{i}\ ;\ 2\mathrm{i}\}$.

$z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1)$: $\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 1\ ;\ -\mathrm{i}\ ;\ \mathrm{i}\}$.

Factoriser une expression du type $a^n - b^n$

Exercice 5.

1. Factoriser $z^3 - 27$ puis $z^5 - 1$ par $z - a$ pour une valeur de a à préciser.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^3 = 27$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $7^n - 1$ est divisible par 6.

1. $z^3 - 27 = (z-3)(z^2+3z+9)$; $z^5 - 1 = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$.
2. $z^2 + 3z + 9 = 0$: $\Delta = -27$, $z = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$. Avec $z = 3$: trois solutions.
3. $7^n - 1^n = (7-1)(7^{n-1} + \cdots + 1)$ est un multiple de 6.

Déterminer les racines n-ièmes de l'unité

Exercice 6.

1. Déterminer les racines quatrièmes et sixièmes de l'unité sous forme algébrique.
2. Placer les racines sixièmes dans le plan complexe. Quelle figure obtient-on ?
3. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$. Montrer que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$ en utilisant la factorisation de $\omega^5 - 1$.

1. Racines quatrièmes : 1, i, -1, $-\mathrm{i}$. Racines sixièmes : $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{3}}$: ± 1, $\pm\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
2. Un hexagone régulier inscrit dans le cercle unité.
3. $0 = \omega^5 - 1 = (\omega - 1)(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1)$ et $\omega \neq 1$.

Exercice 7. [Approfondissement]

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8\mathrm{i}$ en cherchant les solutions sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
2. Vérifier que $-2\mathrm{i}$ est l'une des solutions.

1. $r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$: $r = 2$ et $3\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, soit $\theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$. Solutions : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -2\mathrm{i}$.
2. $(-2\mathrm{i})^3 = -8\mathrm{i}^3 = 8\mathrm{i}$.