Corrigé
Graphes : chaînes de Markov

Modéliser une situation par un graphe probabiliste

Exercice 1.

Un site propose deux abonnements, *Standard* (S) et *Premium* (R). Chaque mois, 15 % des abonnés S passent en R et 5 % des abonnés R repassent en S. Les autres conservent leur abonnement.

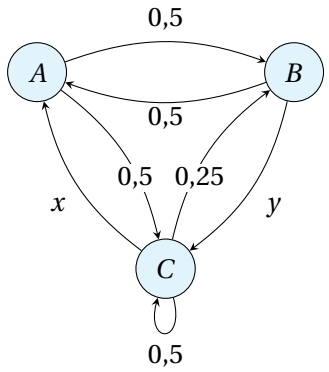
1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition P (ordre S, R).

1. Sommets S et R ; arcs S→S : 0,85, S→R : 0,15, R→S : 0,05, R→R : 0,95.
2. $P = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$.

Associer un graphe orienté à une chaîne de Markov à 2 ou 3 états

Exercice 2.

Une souris se déplace entre trois cases A, B, C. À chaque étape, elle change de case selon le graphe ci-contre.



1. Compléter les poids manquants x et y.
2. Écrire la matrice de transition M (ordre A, B, C).

1. $x = 1 - 0{,}25 - 0{,}5 = 0{,}25$ et $y = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Étudier une chaîne de Markov pour calculer des probabilités

Exercice 3.

On reprend l'exercice 1. Au départ, tous les abonnés sont en S : $\pi_0 = (1 \;\; 0)$.

1. Calculer π_1 et π_2. Interpréter π_2.
2. Déterminer la distribution invariante.
3. Quelle proportion d'abonnés Premium peut-on prévoir à long terme ?

1. $\pi_1 = (0{,}85 \;\; 0{,}15)$; $\pi_2 = (0{,}85 \times 0{,}85 + 0{,}15 \times 0{,}05 \quad 0{,}85 \times 0{,}15 + 0{,}15 \times 0{,}95) = (0{,}73 \;\; 0{,}27)$: au bout de deux mois, 73 % en S et 27 % en R.
2. $(x \;\; y)P = (x \;\; y) : 0{,}85x + 0{,}05y = x$ donne $y = 3x$; avec $x + y = 1 : \pi = (0{,}25 \;\; 0{,}75)$.
3. Environ 75 % (ici $a = 0{,}15$, $b = 0{,}05$, $0 < a + b < 2$).

Exercice 4.

On reprend l'exercice 2. La souris part de A.

1. Calculer la probabilité qu'elle soit en C après deux déplacements.
2. À l'aide de la calculatrice, donner M^{10} (coefficients arrondis à 10^{-3}). Que remarque-t-on ?
3. Déterminer la distribution invariante $\pi = (a \;\; b \;\; c)$.

1. $\pi_2 = \pi_0 M^2$ avec $\pi_1 = (0 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}5) : P(X_2 = C) = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}5$.
2. Les trois lignes de M^{10} sont presque égales à $(0{,}25 \;\; 0{,}25 \;\; 0{,}5)$: la position à long terme ne dépend plus du départ.
3. $\pi M = \pi : 0{,}5b + 0{,}25c = a$; $0{,}5a + 0{,}25c = b$; $0{,}5a + 0{,}5b + 0{,}5c = c$. La dernière donne $c = a + b$; les deux premières donnent $a = b$. Avec $a + b + c = 1 : \pi = (0{,}25 \;\; 0{,}25 \;\; 0{,}5)$.

Exercice 5. [Algorithme]

Écrire une fonction Python distribution(n) qui renvoie π_n pour la chaîne de l'exercice 1, en calculant pas à pas $x_{n+1} = 0{,}85x_n + 0{,}05y_n$ et $y_{n+1} = 0{,}15x_n + 0{,}95y_n$. Que renvoie-t-elle pour $n = 50$?

```
def distribution(n):
    x, y = 1, 0
    for k in range(n):
        x, y = 0.85*x + 0.05*y, 0.15*x + 0.95*y
    return x, y
```

Pour $n = 50$, on obtient environ $(0{,}250 \;\; 0{,}750)$: on retrouve la distribution invariante.