Corrigé
Matrices et calcul matriciel

Calculer avec des matrices

Exercice 1.

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A+B$ et $2A-B$.
2. Calculer AB et BA. Que constate-t-on ?

1. $A+B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$; $2A-B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $AB = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$: $AB \neq BA$.

Exercice 2.

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Donner les tailles de C et X. Le produit XC est-il défini ? Et CX ?
2. Calculer CX. Que remarque-t-on ?

1. $C : 2 \times 3$; $X : 3 \times 1$. XC n'est pas défini $(1 \neq 2)$; CX est défini, de taille 2×1.
2. $CX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors que ni C ni X n'est nulle.

Calculer l'inverse ou une puissance d'une matrice

Exercice 3.

1. Les matrices $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ? Le cas échéant, donner l'inverse.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_2$. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_2.

1. $\det M = 9 - 8 = 1$: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. $\det N = 4 - 4 = 0$: N n'est pas inversible.
2. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 3A - 2I_2$. Donc $A(3I_2 - A) = 2I_2$, soit $A \times \frac{1}{2}(3I_2 - A) = I_2$: $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_2 - A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer T^2 et T^3.
2. Conjecturer l'expression de T^n puis la démontrer par récurrence.

1. $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vrai pour $n = 1$; si vrai au rang n, $T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Résoudre un système linéaire avec des matrices

Exercice 5.

1. Écrire sous forme matricielle et résoudre à l'aide de M^{-1} (exercice 3) le système $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 4x+3y=2 \end{cases}$.
2. À l'aide de la calculatrice, résoudre $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$.

1. $MX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $x=-1$, $y=2$.
2. $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Modéliser une situation par une matrice

Exercice 6.

On cherche une fonction $f(x) = ax^2+bx+c$ dont la courbe passe par les points $(1\,;\,2)$, $(2\,;\,7)$ et $(-1\,;\,4)$.

1. Montrer que $(a\,;\,b\,;\,c)$ est solution d'un système que l'on écrira sous la forme $AX=B$.
2. Résoudre ce système à la calculatrice et donner f.

1. $a+b+c=2$, $4a+2b+c=7$, $a-b+c=4$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. $X = A^{-1}B$: $a=2$, $b=-1$, $c=1$; $f(x) = 2x^2-x+1$.