Arithmétique : PGCD, Bézout et Gauss

Calculer un PGCD avec l'algorithme d'Euclide

Exercice 1.

1. Calculer PGCD(1 071 ; 462) avec l'algorithme d'Euclide.
2. Calculer PGCD(2 026 ; 1 013) et PGCD(377 ; 233).
3. Les nombres 377 et 233 sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 2. [Algorithme]

On considère la fonction Python suivante.

```
def pgcd(a, b):
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a
```

1. Faire tourner « à la main » $\text{pgcd}(84,\ 36)$ en donnant les valeurs successives de a et b.
2. Écrire une fonction $\text{premiers_entre_eux}(\text{a},\ \text{b})$ qui renvoie True si a et b sont premiers entre eux.

Utiliser le théorème de Bézout

Exercice 3.

1. Déterminer, en remontant l'algorithme d'Euclide, deux entiers u et v tels que $23u + 17v = 1$.
2. Montrer que pour tout entier n, $2n+1$ et $3n+2$ sont premiers entre eux.
3. Montrer que pour tout entier n, n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 4.

Soit n un entier naturel, $a = n+3$ et $b = 2n+1$.

1. Montrer que tout diviseur commun de a et b divise 5.
2. En déduire les valeurs possibles de PGCD(a ; b).
3. Déterminer les entiers n pour lesquels PGCD(a ; b) = 5.

Utiliser le théorème de Gauss

Exercice 5.

1. Déterminer les entiers x tels que 7 divise $3x$.
2. Montrer que si 6 et 35 divisent un entier n, alors 210 divise n.
3. Soit n un entier. Montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

Résoudre une équation diophantienne

Exercice 6.

1. L'équation $6x+15y=4$ a-t-elle des solutions entières ? Et $6x+15y=9$?
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x-4y=1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23x+17y=2$ (on pourra utiliser l'exercice 3).

Exercice 7. [Problème]

Dans un jeu, on ne dispose que de jetons de 9 points et de 14 points. On veut obtenir exactement 200 points.

1. Justifier que l'équation $9x+14y=200$ a des solutions entières.
2. Vérifier que $9\times(-3)+14\times 2=1$ et en déduire une solution particulière.
3. Résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}^2$, puis donner les solutions avec $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$.

Corrigé