Corrigé
Arithmétique : PGCD, Bézout et Gauss

Calculer un PGCD avec l'algorithme d'Euclide

Exercice 1.

1. Calculer PGCD(1 071 ; 462) avec l'algorithme d'Euclide.
2. Calculer PGCD(2 026 ; 1 013) et PGCD(377 ; 233).
3. Les nombres 377 et 233 sont-ils premiers entre eux?

1. $1\,071 = 462 \times 2 + 147$; $462 = 147 \times 3 + 21$; $147 = 21 \times 7 + 0$. Donc PGCD = 21.
2. $2\,026 = 1\,013 \times 2$ donc PGCD(2 026 ; 1 013) = 1 013.
   $377 = 233 + 144$; $233 = 144 + 89$; $144 = 89 + 55$; $89 = 55 + 34$; $55 = 34 + 21$; $34 = 21 + 13$; $21 = 13 + 8$; $13 = 8 + 5$; $8 = 5 + 3$; $5 = 3 + 2$; $3 = 2 + 1$; $2 = 1 \times 2 + 0$.
   PGCD = 1.
3. Oui, leur PGCD vaut 1 (ce sont deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci).

Exercice 2. [Algorithme]

On considère la fonction Python suivante.

```
def pgcd(a, b):
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a
```

1. Faire tourner « à la main » `pgcd(84, 36)` en donnant les valeurs successives de `a` et `b`.
2. Écrire une fonction `premiers_entre_eux(a, b)` qui renvoie `True` si a et b sont premiers entre eux.

1. $(84,36) \to (36,12) \to (12,0)$: la fonction renvoie 12.
2. `def premiers_entre_eux(a, b): return pgcd(a, b) == 1`

Utiliser le théorème de Bézout

Exercice 3.

1. Déterminer, en remontant l'algorithme d'Euclide, deux entiers u et v tels que $23u + 17v = 1$.
2. Montrer que pour tout entier n, $2n+1$ et $3n+2$ sont premiers entre eux.
3. Montrer que pour tout entier n, n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

1. $23 = 17+6$; $17 = 6\times 2+5$; $6 = 5+1$. Donc $1 = 6-5 = 6-(17-2\times 6) = 3\times 6-17 = 3(23-17)-17 = 3\times 23-4\times 17$: $u = 3$, $v = -4$.
2. $3(2n+1)-2(3n+2) = -1$, donc $(2n+1)\times(-3)+(3n+2)\times 2 = 1$: d'après Bézout, ils sont premiers entre eux.
3. $(2n+1)\times 1 + n\times(-2) = 1$.

Exercice 4.

Soit n un entier naturel, $a = n+3$ et $b = 2n+1$.

1. Montrer que tout diviseur commun de a et b divise 5.
2. En déduire les valeurs possibles de PGCD$(a\,;\,b)$.
3. Déterminer les entiers n pour lesquels PGCD$(a\,;\,b) = 5$.

1. Un diviseur commun divise $2a-b = 5$.
2. 1 ou 5.
3. $5 \mid n+3$ équivaut à $n \equiv 2 \pmod 5$, et alors $2n+1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$. Donc PGCD $= 5$ si et seulement si $n = 5k+2$, $k \in \mathbb{N}$.

Utiliser le théorème de Gauss

Exercice 5.

1. Déterminer les entiers x tels que 7 divise $3x$.
2. Montrer que si 6 et 35 divisent un entier n, alors 210 divise n.
3. Soit n un entier. Montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

1. 7 est premier avec 3, donc d'après Gauss $7 \mid x$: $x = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. 6 et 35 sont premiers entre eux ($6 \times 6 - 35 = 1$), donc $6 \times 35 = 210$ divise n.
3. $n(n+1)$ est pair. Modulo 3 : si $n \equiv 0$, n convient ; si $n \equiv 2$, $n+1 \equiv 0$; si $n \equiv 1$, $2n+1 \equiv 0$. Le produit est divisible par 2 et 3, premiers entre eux, donc par 6.

Résoudre une équation diophantienne

Exercice 6.

1. L'équation $6x + 15y = 4$ a-t-elle des solutions entières ? Et $6x + 15y = 9$?
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x - 4y = 1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23x + 17y = 2$ (on pourra utiliser l'exercice 3).

1. PGCD$(6\ ;\ 15) = 3$ ne divise pas 4 : pas de solution. 3 divise 9 : il y a des solutions (par exemple $(4\ ;\ -1)$).
2. $(3\ ;\ 5)$ est solution. Par soustraction $7(x-3) = 4(y-5)$; 4 est premier avec 7 donc $4 \mid x-3$: $x = 3+4k$, puis $y = 5+7k$. Réciproquement $7(3+4k)-4(5+7k) = 1$. Solutions : $(3+4k\ ;\ 5+7k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $(6\ ;\ -8)$ est solution. $23(x-6) = -17(y+8)$, Gauss : $x = 6+17k$, $y = -8-23k$, $k \in \mathbb{Z}$ (réciproque immédiate).

Exercice 7. [Problème]

Dans un jeu, on ne dispose que de jetons de 9 points et de 14 points. On veut obtenir exactement 200 points.

1. Justifier que l'équation $9x + 14y = 200$ a des solutions entières.
2. Vérifier que $9 \times (-3) + 14 \times 2 = 1$ et en déduire une solution particulière.
3. Résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}^2$, puis donner les solutions avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

1. PGCD$(9\ ;\ 14) = 1$ divise 200.
2. $9 \times (-3) + 14 \times 2 = -27 + 28 = 1$, donc $(-600\ ;\ 400)$ est solution.
3. $9(x+600) = -14(y-400)$; Gauss : $x = -600 + 14k$, $y = 400 - 9k$. $x \geqslant 0$ donne $k \geqslant 43$; $y \geqslant 0$ donne $k \leqslant 44$. $k = 43$: $(2\ ;\ 13)$; $k = 44$: $(16\ ;\ 4)$.