Annales baccalauréat STI2D
Exponentielle

Exercice 1.

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

1. On a $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$; or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$.
2. La fonction f produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable en particulier sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant comme un produit :
$f'(x) = 1\,\mathrm{e}^{-x} - 1 \times x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.
3. On sait que quel que soit $x \in [0~;~+\infty[$, $\quad \mathrm{e}^{-x} > 0$: le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1-x$:
   - $1-x > 0 \iff 1 > x$: on a donc $f'(x) > 0$ sur $[0~;~1[$; la fonction est croissante sur $[0~;~1[$;
   - $1-x < 0 \iff 1 < x$: on a donc $f'(x) < 0$ sur $[1~;~+\infty]$; la fonction est décroissante sur $[1~;~+\infty]$;
   - $1-x = 0 \iff 1 = x$: on a donc $f'(1) = 0$; la fonction f a un maximum en 1 égal à $f(1) = 1\,\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,368$.
   - D'autre part $f(0) = 0 \times \mathrm{e}^{0} = 0 \times 1 = 0$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Exercice 2.

L'expression $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^{2} \times \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{-3}}{\mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^{6x}}$ vaut :

A	B	C	D
e^{-1}	$\dfrac{2}{5}x^{-3}$	e^{-x}	e^{-23x}

$\dfrac{\left(\text{e}^{-3x}\right)^2 \times \left(\text{e}^{2x}\right)^{-3}}{\text{e}^{5x} \times \text{e}^{6x}} = \dfrac{\text{e}^{-6x} \times \text{e}^{-6x}}{\text{e}^{11x}} = \dfrac{\text{e}^{-12x}}{\text{e}^{11x}} = \text{e}^{-12x-11x} = \text{e}^{-23x}$. Réponse D.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{2x}(-3x+1).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
Montrer que

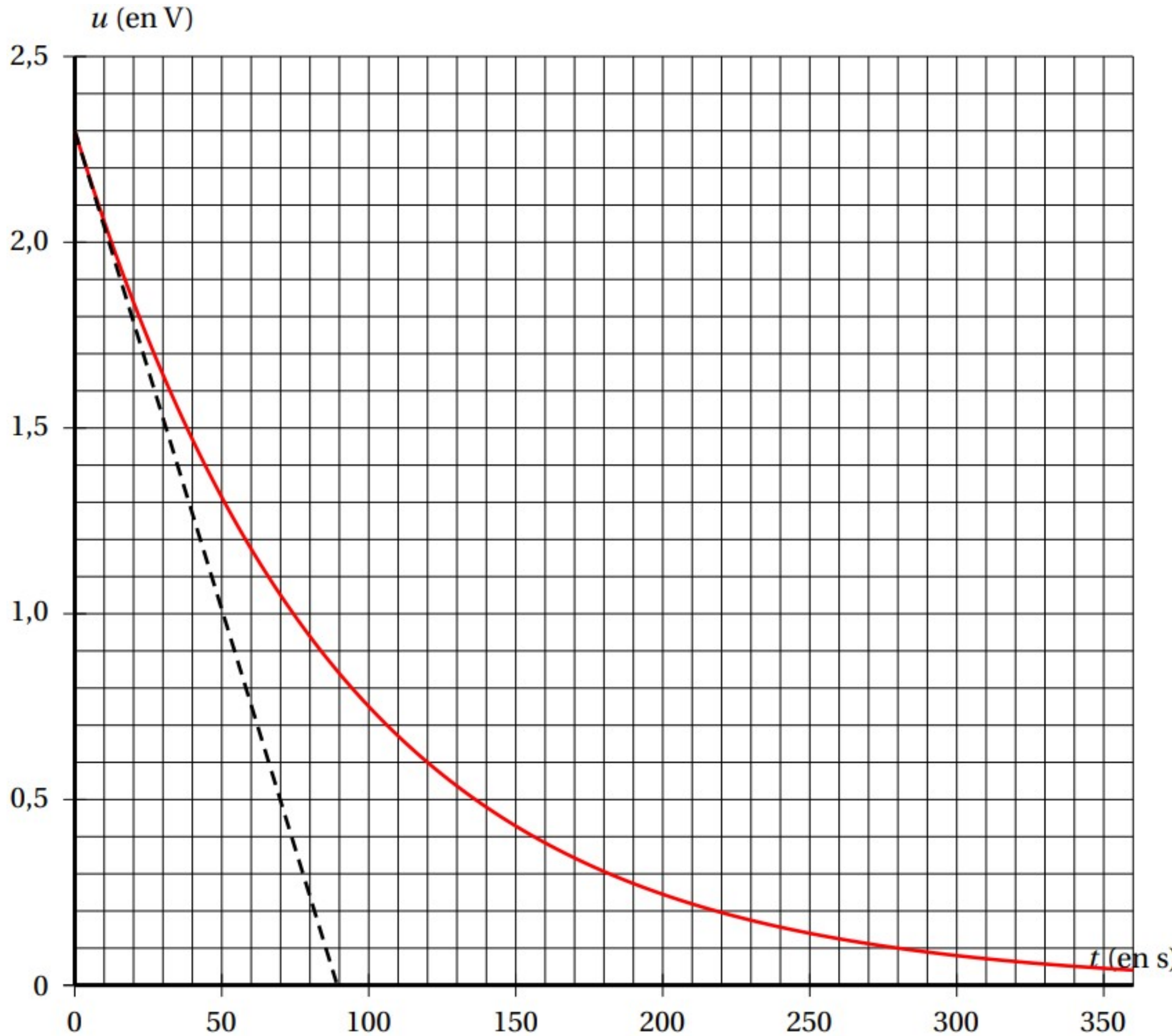
$$f'(x) = \text{e}^{2x}(-6x-1).$$

En posant $u(x) = \text{e}^{2x}$, d'où $u'(x) = 2\text{e}^{2x}$ et $v(x) = -3x+1$, d'où $v'(x) = -3$, on a $f'(x) = (uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x)v'(x) = 2\text{e}^{2x}(-3x+1) - 3\text{e}^{2x} = \text{e}^{2x}[2(-3x+1)-3] = \text{e}^{2x}(-6x+2-3) = \text{e}^{2x}(-6x-1)$.

Exercice 4.

On réalise un montage qui permet de charger un supercondensateur de capacité égale à 372 F avec un générateur (interrupteur sur 1), puis de le décharger dans le conducteur ohmique de résistance R (interrupteur sur 2).

Le graphique ci-dessous représente l'enregistrement de l'évolution de la tension aux bornes du supercondensateur au cours de sa décharge.



Données : énergie W_c accumulée par le supercondensateur

$$W_c = \frac{1}{2} \times C \times u^2.$$

Avec C : capacité du supercondensateur en farad (F)
u : tension aux bornes du supercondensateur en volt (V)
W_c : énergie stockée dans le supercondensateur en joule (J)
1 W h = 3 600 J

3. À partir du graphique, on peut dire que la tension initiale dans le supercondensateur est : $u_i = 2,3$ V.

Donc l'énergie initiale est égale à : $W_c = \frac{1}{2} \times C \times u_i^2 = \frac{1}{2} \times 372 \times 2,3^2 = 983,94$ J.

4. La masse du supercondensateur est de 60 g, donc de 0,06 kg.

Son énergie initiale est en Joule, de 983,94, donc elle est en Wh de $\frac{983,94}{3\,600}$.

Donc son énergie massique en Wh/kg est de $\frac{\frac{983,94}{3\,600}}{0,06}$, soit environ de 4,56.

Cette énergie massique est comprise entre 4 et 5, ce qui est typique d'un supercondensateur.

L'évolution de la tension aux bornes du supercondensateur, après fermeture de l'interrupteur K en position 2, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2,3\mathrm{e}^{-0,0112x},$$

où x représente le temps en seconde.

5. On détermine une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
$f'(x) = 2,3 \times (-0,0112)\,\mathrm{e}^{-0,0112x} = -0,02576\,\mathrm{e}^{-0,0112x}$ donc $f'(0) = -0,02576$.
$f(x) = 2,3\,\mathrm{e}^{-0,0112x}$ donc $f(0) = 2,3$.
La tangente a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = -0,02576x + 2,3$.

6. L'abscisse τ du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est la solution de l'équation : $0 = -0,02576x + 2,3$; donc $\tau = \dfrac{2,3}{0,02576} \approx 89,3$.

7. On sait que : $\tau = RC$ et $R = 0,235\ \Omega$.
Donc $C = \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{89,3}{0,235} \approx 380$ F.
La valeur obtenue à partir de ce modèle est un peu supérieure à celle donnée par le constructeur.

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x}.$$

f est dérivable et sa dérivée est notée f'.
Justifier le signe de $f'(x)$ établi dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x} + (x-1) \times \mathrm{e}^{x} = x\,\mathrm{e}^{x}$
Pour tout réel x, on sait que $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x.

Exercice 6.

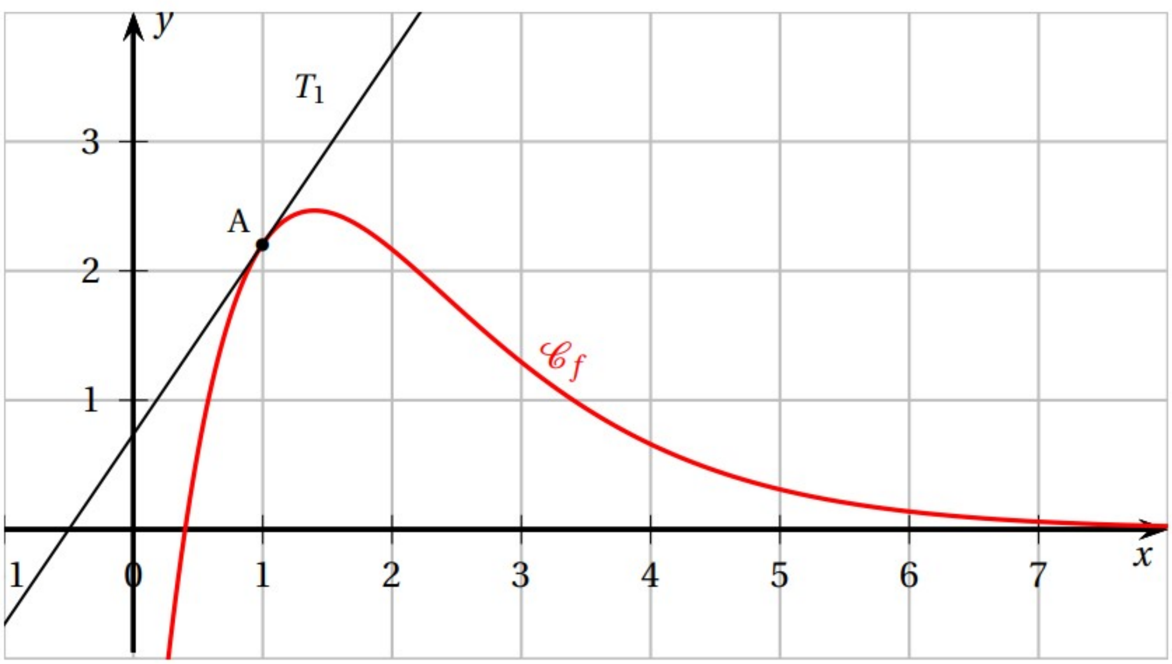
Soit la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = (10x - 4)e^{-x}.$$

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f donnée dans le repère ci-dessous.

La droite T_1 est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 et on admet que la dérivée de f est définie pour tout réel x par

$$f'(x) = (-10x + 14)e^{-x}.$$



1. Calculons la valeur exacte de l'ordonnée du point A.
   Pour ce faire, calculons $f(1)$
   $f(1) = (10 \times 1 - 4)\,\mathrm{e}^{-1} = 6\,\mathrm{e}^{-1} \approx 2,21.$
2. Calculons $f'(1)$.
   $f'(1) = (-10 \times 1 + 14)\,\mathrm{e}^{-1} = 4\,\mathrm{e}^{-1} \approx 1,47.$
   Cette valeur est le coefficient directeur de T_1, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
3. La courbe représentative de la fonction f suggère l'existence d'un maximum sur l'intervalle $[1\,;2]$.
   Déterminons la valeur exacte de ce maximum.
   Les maximums sont à rechercher parmi les points où la dérivée s'annule.
   Résolvons donc $f'(x) = 0$ soit $(-10x + 14)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, nous sommes amenés à résoudre
$-10x+14=0 \iff 14=10x \iff 7=5x$ d'où $x=\dfrac{7}{5}=1,4$.
La fonction admet un maximum pour $x=\dfrac{7}{5}$.

Exercice 7.

Contrôle de la température dans un lave-linge.

Lors d'un cycle de lavage d'une machine à laver le linge, la phase qui consomme le plus d'énergie est le chauffage de l'eau utilisée en phase de lavage.

Chauffage de l'eau dans le lave-linge.

Le chauffage de l'eau est assuré par une résistance chauffante d'une puissance électrique $P_{\text{élec}} = 2{,}0\,\text{kW}$.
En moyenne, le volume de l'eau utilisée lors d'une phase de lavage est $V = 15\,\text{L}$.

Q1. Calculer la valeur du transfert thermique Q nécessaire pour chauffer le volume d'eau V lors d'un cycle de lavage de 20 °C à 40 °C.
Question de physique.

Données :
- Capacité thermique massique de l'eau : $C_{\text{eau}} = 4\,180\ J \cdot kg^{-1} \cdot {}^{\text{o}}C^{-1}$.
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1{,}0\,\text{kg}\cdot\text{L}^{-1}$.

Q2. Donner la relation entre l'énergie électrique $E_{\text{élec}}$ consommée pendant la durée Δt de la phase de chauffage et la puissance $P_{\text{élec}}$. Préciser les unités.
Question de physique.

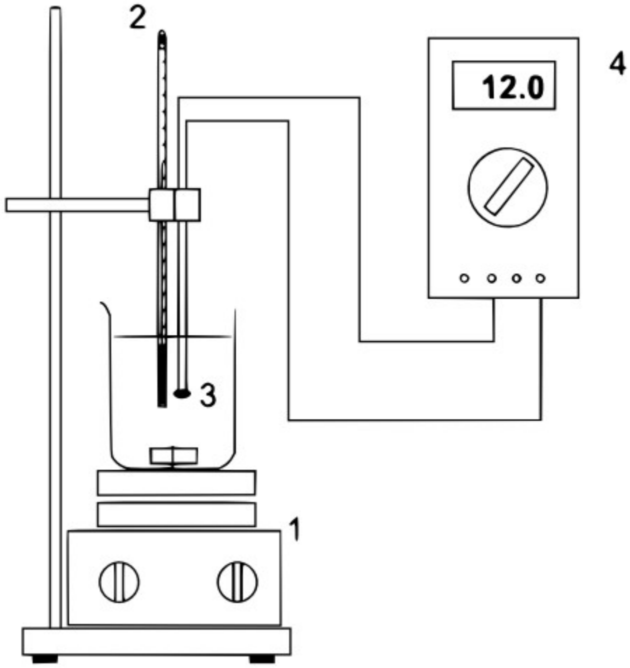
On considère que toute l'énergie électrique consommée par la résistance chauffante est transférée au volume d'eau.

Q3. Vérifier que la durée Δt de la phase de chauffage est de l'ordre de 10 minutes.
Question de physique.

Étude d'une thermistance CTN.

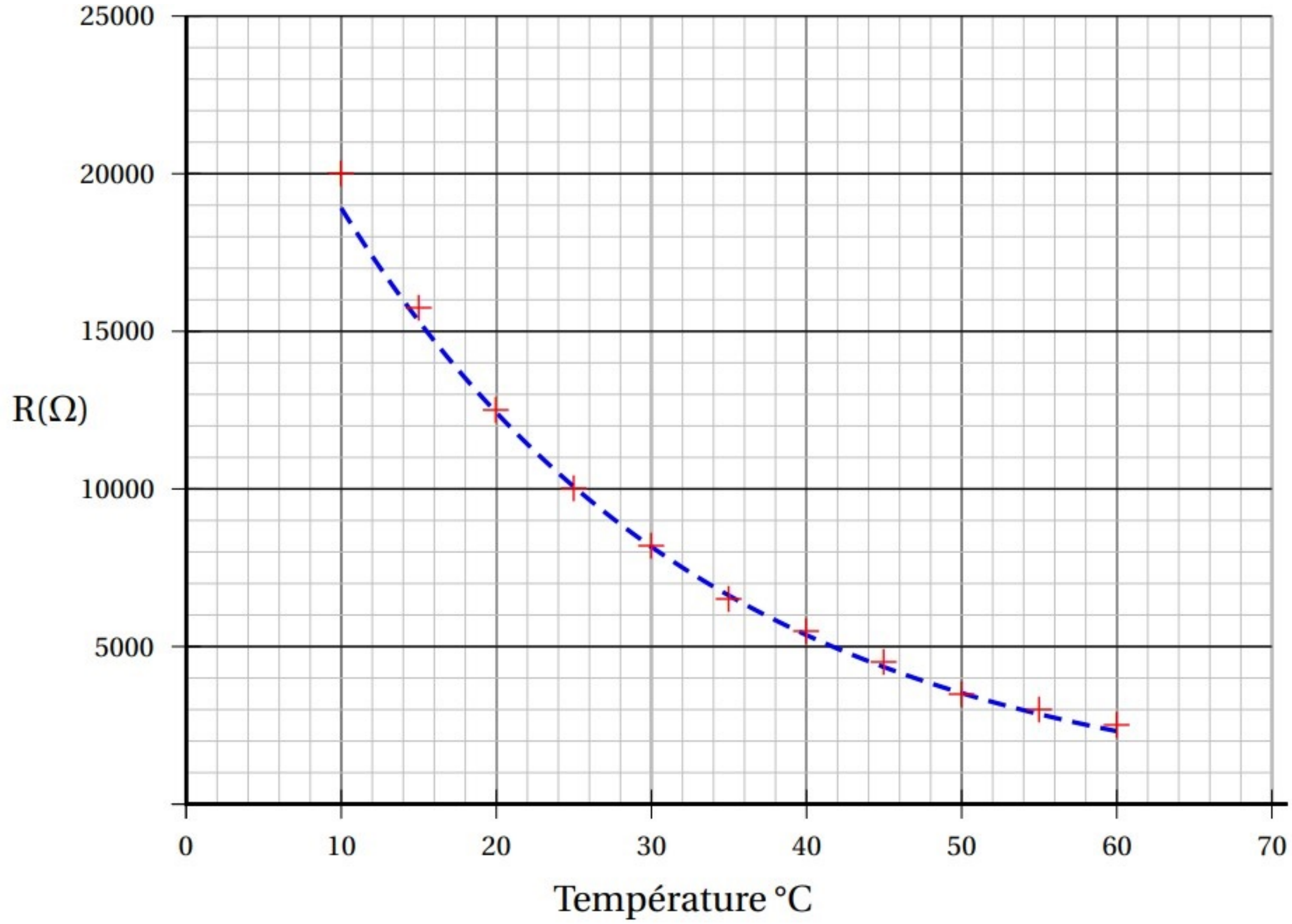
La température de l'eau est contrôlée par une thermistance CTN, qui est un composant dont la valeur de la résistance électrique R varie en fonction de la température.
Il est possible, au laboratoire, d'étudier les variations de la résistance d'une thermistance CTN en fonction de la température à l'aide du montage représenté dans le document 1.

Document 1 –Montage expérimental



1 : Agitateur magnétique chauffant
2 : Thermomètre
3 : Thermistance
4 : Ohmètre

Les valeurs obtenues pour une thermistance donnée permettent de tracer la courbe suivante.



Document 2 - Résistance de la thermistance CTN en fonction de la température

Cette résistance (en Ω), en fonction de la température T (en °C), peut être modélisée par la fonction R définie sur $[0\ ;\ 100]$:

$$R(T) = 28\,785 \times e^{-0,042\times T}.$$

Q4. À l'aide du graphique, déterminons à partir de quelle température la résistance devient inférieure à $10\,\text{k}\Omega$.
Avec la précision donnée par le graphique, la courbe coupe la droite d'équation $y = 10\,000$ au point d'abscisse $T = 25$ (en °C).

Q5. Résolvons sur $[0\ ;\ 100]$ l'équation $R(T) = 10\,000$.

$$\begin{aligned}
28\,785\,\mathrm{e}^{-0,042\times T} &= 10\,000\\
\mathrm{e}^{-0,042\times T} &= \frac{10\,000}{28\,785}\\
\mathrm{e}^{-0,042\times T} &= \frac{2\,000}{5\,757}\\
-0,042\times T &= \ln\frac{2\,000}{5\,757}\\
T &= -\frac{\ln\frac{2\,000}{5\,757}}{0,042}
\end{aligned}$$

$T \approx 25{,}173$
Cette valeur est approximativement la même que celle lue sur le graphique en réponse à la question **Q4.**

Q6. On note R' la fonction dérivée de R sur $[0\,;\,100]$. Déterminons une expression de $R'(T)$ en $\Omega\cdot^{\text{o}}C^{-1}$.

$$R'(T) = -28\,785\times 0{,}042\times\,\mathrm{e}^{-0,042\times T} = -1\,208{,}97\,\mathrm{e}^{-0,042\times T}$$

La sensibilité de la thermistance CTN est donnée par la fonction S définie sur $[0\,;\,100]$ par :

$$S = -\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}.$$

Le dispositif de régulation de la température sera d'autant plus performant que la valeur de la sensibilité de la thermistance sera grande.

Q7. Montrons que la sensibilité de la thermistance CTN est environ 12 fois plus grande à 30 °C qu'à 90 °C.
Pour ce faire, comparons $S(30)$ et $S(90)$.

$$\frac{S(30)}{S(90)} = \frac{-1\,208{,}97\,\mathrm{e}^{-0,042\times 30}}{-1\,208{,}97\,\mathrm{e}^{-0,042\times 90}} = \frac{\mathrm{e}^{-0,042\times 30}}{\mathrm{e}^{-0,042\times 90}} \approx 12,43.$$

Nous avons bien approximativement $S(30) = 12S(90)$

Exercice 8.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\,\mathrm{e}^{3x} - \lim_{x\to-\infty} 2 = 0-2 = -2$$

Exercice 9.

Une société de peinture utilise, dans le cadre de son activité, une nacelle élévatrice (dite « nacelle à ciseaux »).

On note $h(t)$ la hauteur (en mètre) de la nacelle à l'instant t (en seconde) suivant la mise en route.

On suppose que h est la fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ d'expression

$$h(t) = -15\mathrm{e}^{-0,2t} + 18.$$

D'après : *https ://www.haulotte.fr/produitlh18-sx*

1. La hauteur initiale de la nacelle est, en mètre : $h(0) = -15\,\mathrm{e}^{\,0} + 18 = -15 + 18 = 3$.
2. On sait que $\displaystyle\lim_{T \to -\infty} \mathrm{e}^{\,T} = 0$. Or $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} -0,2t = -\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{\,-0,2t} = 0$.

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} h(t) = 18$.

   La nacelle ne peut donc pas dépasser la hauteur de 18 mètres.

Exercice 10.

Modèle de la vitesse de refroidissement d'un lait écrémé

Dans le domaine de l'agroalimentaire, la question du refroidissement des produits préparés peut être cruciale. On peut citer par exemple la problématique de la durée de refroidissement du lait produit dans une ferme : afin d'éviter la prolifération microbienne, il convient de minimiser cette durée de refroidissement.

Afin d'étudier l'évolution de la température d'une masse de liquide en contact avec l'atmosphère d'une pièce en fonction du temps, l'expérience suivante est réalisée.

Une masse de lait écrémé $m = 150$ g est chauffée à une température de 63,4 °C. On laisse ensuite le lait se refroidir à l'air libre en relevant sa température toutes les minutes.

Pendant toute la durée de l'expérience, la température de l'air de la pièce reste constante et inférieure à celle du lait.

Résultats de l'expérience : température de la masse de lait en fonction du temps t.

t (en min)	0	1	2	3	4	5	6	7
température (en °C)	63,4	61,7	60,2	58,6	57,4	56,2	54,7	53,6
t (en min)	8	9	10	11	12	13	14	15
température (en °C)	52,4	51,2	50,4	49,4	48,5	47,4	46,6	45,9

Donnée :
– Pour la capacité thermique massique du lait, on prendra : $C_{\text{lait}} = 4,0$ kJ.kg^{-1}. K^{-1}.

1. Les trois modes de transfert thermique sont la convection, la conduction, et le rayonnement.
2. Le lait se refroidit, donc le transfert thermique s'opère de la masse de lait vers l'air de la pièce.
3. La différence de température, entre les dates $t = 1$ min et $t = 2$ min, est de $\Delta T = 61,7 - 60,2 = 1,5$°C. On a aussi $m = 150\,\text{g}$ et $c_{\text{lait}} = 4,0\,\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. De par le cours, on a :

$$\begin{aligned} Q &= c_{\text{lait}} \times m \times \Delta T \\ &= 4,0 \times 0,15 \times 1,5 && \text{après avoir converti } m \text{ en kg} \\ &= 0,9\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

   Entre $t = 6$ min et $t = 7$ min, la différence de température est moindre, donc la valeur de transfert thermique est plus petite que Q.
4. On a

$$\begin{aligned} T(0) &= 37 \times \text{e}^{\frac{-20\times 0}{459}} + 26,4 \\ &= 37 \times \text{e}^0 + 26,4 \\ &= 37 \times 1 + 26,4 \\ &= 63,4 \end{aligned}$$

   Lorsque l'on commence la prise de mesures, le lait a une température de $63,4$°C (ce qui est conforme aux données de l'énoncé).
5. Une propriété du cours dit que $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{kt} = 0$ lorsque $k < 0$. Ici, $k = \dfrac{20}{459}$; ainsi, par produit et somme,

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = 37\times 0 + 26,4 = 26,4.$$

On peut affirmer qu'alors, la température de l'air pièce est de 26,4 °C puisque, après un long temps passé, la température du lait se rapproche de celle du milieu ambiant.

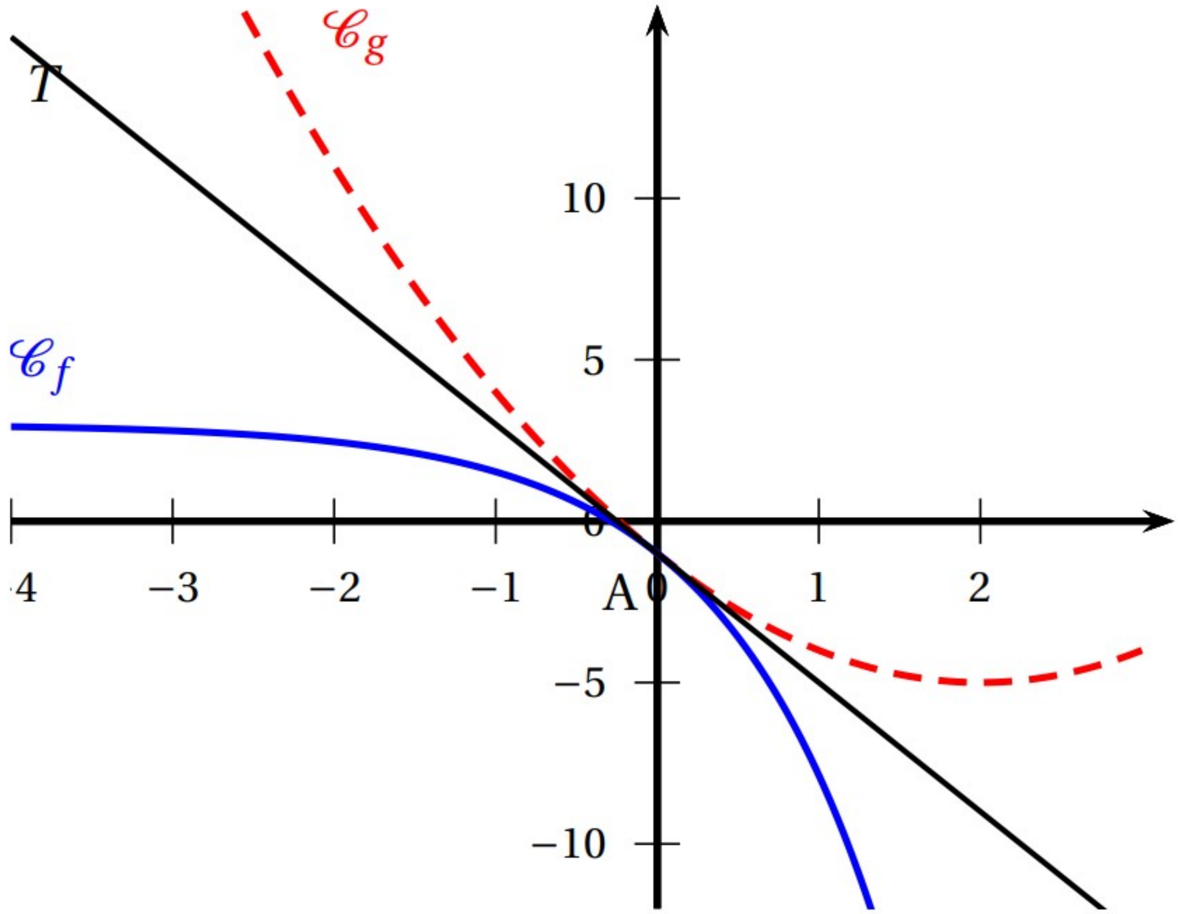
6. On a

$$\begin{aligned}
& & T(t) &= 40\\
&\iff & 37\times \mathrm{e}^{\frac{-20t}{459}}+26,4 &= 40\\
&\iff & 37\times \mathrm{e}^{\frac{-20t}{459}} &= 40-26,4\\
&\iff & \mathrm{e}^{\frac{-20t}{459}} &= \frac{13,6}{37}\\
&\iff & \frac{-20t}{459} &= \ln\left(\frac{13,6}{37}\right)\\
&\iff & t &= \frac{\ln\left(\frac{13,6}{37}\right)}{\frac{-20}{459}}\\
& & &= -\frac{459}{20}\ln\left(\frac{13,6}{37}\right)\\
& & &\simeq 22,969.
\end{aligned}$$

En convertissant 0,969 minutes en seconde, on trouve que la température du lait atteint 40°C au bout de 22 minutes et 58 secondes.

Exercice 11.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + b\mathrm{e}^{x}$, où a et b sont deux nombres réels.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par$g(x) = x^2 - 4x - 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g, tracées dans le repère orthogonal ci-dessous.



1. On a $g(0) = -1$. Puisque A est commun aux deux courbes, on a aussi $f(0) = -1$; mais par le calcul, $f(0) = a + b\mathrm{e}^0 = a + b$. Il s'ensuit l'égalité $a + b = -1$.

2. **a.** On a, pour tout réel x, $g'(x) = 2x - 4$, puis $g'(0) = 2 \times 0 - 4 = -4$.

b. Puisque $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont la même tangente T en A, les dérivées évaluées en 0 doivent être identiques ; ainsi on a $f'(0) = -4$. Mais par le calcul, $f'(x) = b\mathrm{e}^x$ pour tout réel x, donc $f'(0) = b\mathrm{e}^0 = b$. Il vient alors :

— par identification de $f'(0)$: $b = -4$;

— puis, comme $a + b = -1$, on a $a - 4 = -1$, soit $a = -1 + 4 = 3$.

Exercice 12.

L'étude proposée concerne un avion A320 d'environ 180 places.

Le taxiage est la période au cours de laquelle l'avion se déplace au sol, soit pour aller vers la piste de décollage soit pour aller vers son point de stationnement.

L'objectif du dispositif étudié est de permettre le déplacement autonome de l'avion au sol, sans utiliser ses moteurs principaux (réacteurs) mais des moteurs électriques.
Cette solution garantit une réduction des nuisances sonores et des émissions de CO_2.
L'utilisation des moteurs électriques diminue aussi fortement l'ingestion de corps étrangers (oiseaux) par les réacteurs sur le tarmac. La solution étudiée consiste en une motorisation électrique des deux trains principaux de l'avion (un moteur électrique par train). Lors des phases de déplacement au sol, l'avion est propulsé par ses moteurs électriques, au lieu de ses réacteurs.

Caractéristiques de l'Airbus A320

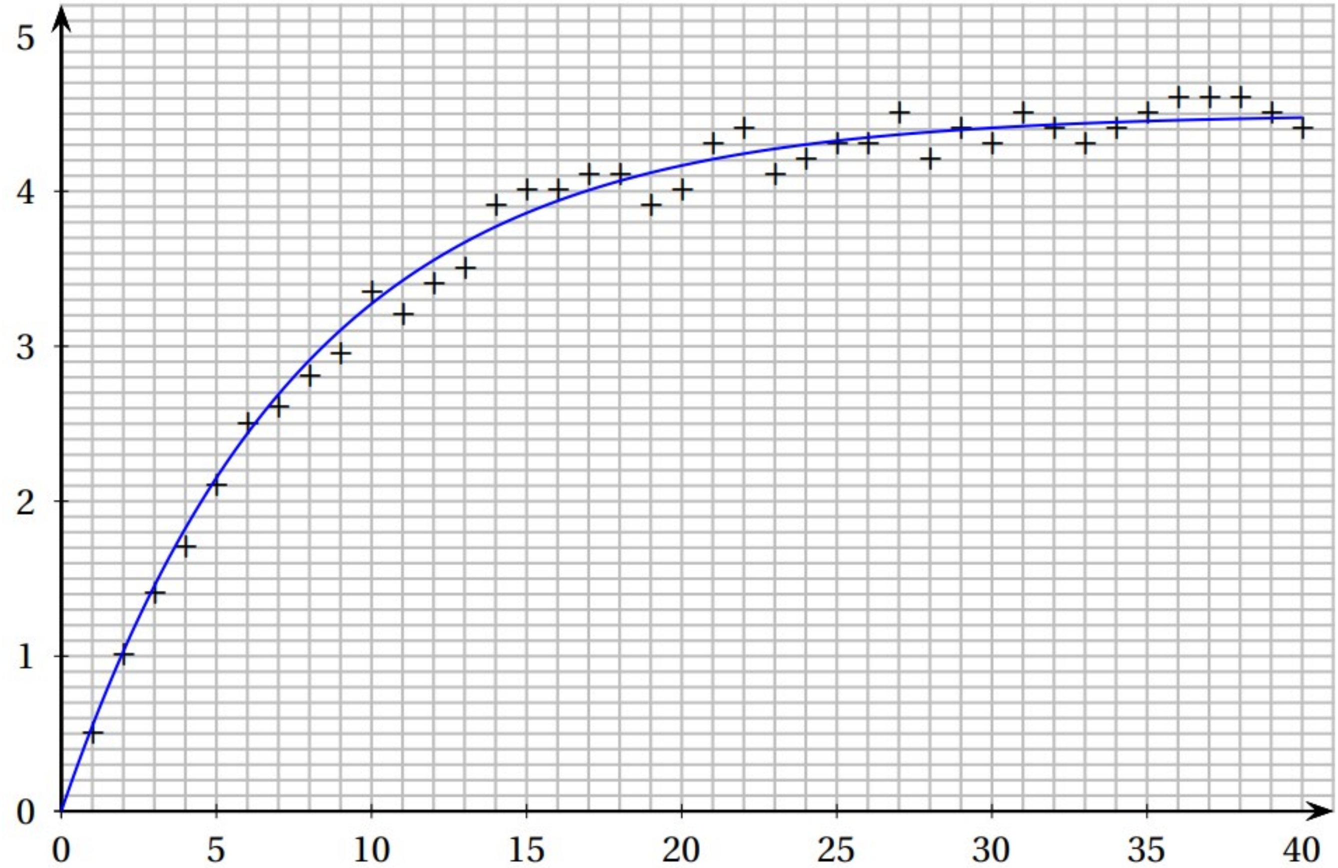
Équipage	
Équipage commercial	4 personnes
Équipage technique	2 personnes
Mécanicien navigant	–
Pilotes	2 personnes
Radio	–
Masse (kg)	
Masse à vide	42 600
Masse maximale à l'atterrissage	64 500
Masse maximale au décollage	73 500
Motorisation	
Moteurs	–
Poussée	9 980 kgp
Réacteurs	x2 CFM56-5A4

D'après https ://fr.wikipedia.org//Airbus_A320

Toute l'étude est réalisée lors d'un taxiage avant un décollage sur sol horizontal en charge maximale.
L'avion, initialement à l'arrêt, démarre sur un sol horizontal et atteint une vitesse maximale v_{max}. On modélise la vitesse de l'avion, exprimée en m.s^{-1}, par une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = A \times \left(1 - e^{-0,13t}\right)$ où A est une constante réelle et t est le temps exprimé en seconde.

1. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,13t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = A$.

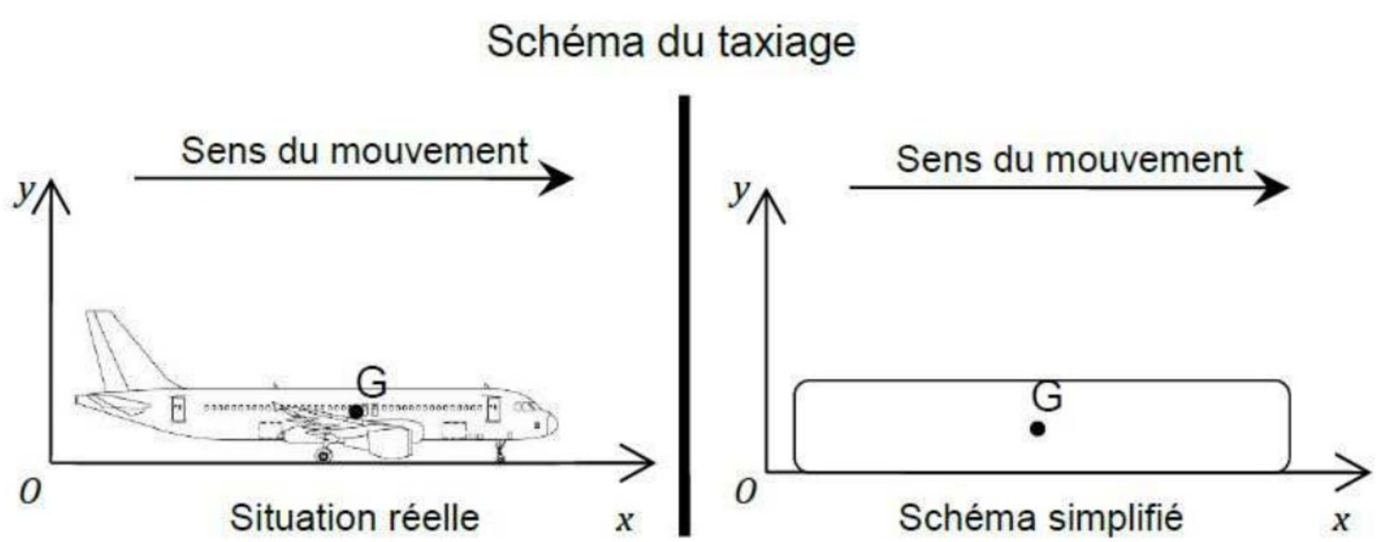
La représentation graphique de cette fonction est donnée sur le graphique ci-après. Elle modélise les valeurs expérimentales représentées par des croix sur ce graphique.



2. Le graphique donne $A \approx 4,5$.

La vitesse de l'avion, exprimée en m.s^{-1}, est modélisée par la fonction v définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $v(t) = 4,5 \times \left(1 - e^{-0,13t}\right)$. On admet que v est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note v' la dérivée de v.

3. On a pour $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad v'(t) = 4,5 \times (-0,13)\,\mathrm{e}^{-0,13t} = 0,585\,\mathrm{e}^{-0,13t}$.



Questions de physique.

4. Préciser la direction et le sens de la force de traction $\overrightarrow{F}_T$ exercée par les moteurs électriques sur l'avion.
5. Recopier le schéma simplifié sur votre copie et représenter en G, sans souci d'échelle, toutes les forces s'exerçant sur l'avion. Indiquer le nom de chacune de ces forces.
6. On se place à l'instant $t = 0$ s. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que si l'on néglige les forces de frottement, on peut écrire $F_T = m \times a$.
7. En déduire la valeur de la force de traction exercée par chacun des moteurs électriques lors du démarrage de l'avion, sachant que l'accélération à $t = 0$ s est estimée à $0,585$ m.s^{-2}.

Exercice 13.

g est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
On admet que la dérivée de g est la fonction g' définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g'(t) = 6e^{-t}(1-t).$$

1. Comme $6 > 0$ et $\mathrm{e}^{-t} > 0$, quel que soit $t \in [0\,;\,+\infty[$, le signe de $g'(t)$ est celui de $1-t$.
   - $1-t > 0 \iff 1 > t \iff t < 1$: $g'(t) > 0$ sur $[0\,;\,1]$;
   - $1-t < 0 \iff 1 < t \iff t > 1$: $g'(t) < 0$ sur $[1\,;\,+\infty]$;
   - $1-t = 0 \iff 1 = t \iff t = 1$: $g'(1) = 0$.
2. Des résultats précédents on déduit que :
   - g est croissante sur $[0\,;\,1]$;
   - g est décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$;
   - $g(1)$ est donc le maximum de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice 14.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2e^x$.

1. Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\,\mathrm{e}^{x} = x^2 \times \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\left(x^2 \times \mathrm{e}^{-x} - 2\right)$.
2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et aussi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\,\mathrm{e}^{-x} - 2\right) = -2$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$, par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 15.

Il faut trouver le temps t au bout duquel :
$N(t) = \dfrac{N(0)}{2} = N(0)\,\mathrm{e}^{-0,086t} \iff \dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-0,086t} \iff \ln\dfrac{1}{2} = -0,086t \iff -\ln 2 = -0,086t \iff t = \dfrac{\ln 2}{0,086}$.
La calculatrice donne $\dfrac{\ln 2}{0,086} \approx 8,059$, soit 8 jours au jour près.

Exercice 16.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^x$.

Vrai ou faux : « La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. »

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{x} + x^2 \times \mathrm{e}^{x} = x(2+x)\,\mathrm{e}^{x}$.
Sur $]-2\,;\,0[$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.
Affirmation fausse