

Corrigé

Fonctions exponentielles

Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Exercice 1. Propriétés algébriques

Simplifier les expressions suivantes.

1.
$$\frac{e^2 \times e^5}{e^7}$$

2.
$$\frac{e^4}{\frac{e^{-2}}{e^6}}$$

3.
$$\frac{(e^3)^2 \times e^{-4}}{e^2}$$

4.
$$\frac{e^x \times e^{1-x}}{e}$$

5.
$$\frac{\frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}}{e^{x+2}}$$

6.
$$\frac{(e^x + e^{-x})^2}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}$$

7.
$$\frac{\frac{(e^x)^3}{e^{2x}}}{e^x}$$

8.
$$\frac{e^{-x}(e^{2x} - e^x)}{e^x - 1}$$

9.
$$\frac{\frac{e^x + e^{2x}}{e^x}}{1 + e^x}$$

Exercice 2. Équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{2x-1} = e^5$

$$2x - 1 = 5 : \mathcal{S} = \{3\}$$

2. $e^{x^2} = e^4$

$$x^2 = 4 : \mathcal{S} = \{-2 ; 2\}$$

3. $e^{3x} \times e^2 = 1$

$$e^{3x+2} = e^0 : \mathcal{S} = \{-\frac{2}{3}\}$$

4. $e^x = -2$

$\mathcal{S} = \emptyset$ (une exponentielle est strictement positive)

5. $e^{-x} > e^3$

La fonction exp est strictement croissante : $-x > 3$, $\mathcal{S} =]-\infty ; -3[$

6. $e^{2x} \leq e^{x+4}$

$$2x \leq x + 4 : \mathcal{S} =]-\infty ; 4]$$

7. $(x-3)e^x = 0$

$$e^x \neq 0 : \mathcal{S} = \{3\}$$

8. $(2-x)e^{-x} > 0$

Du signe de $2-x$: $\mathcal{S} =]-\infty ; 2[$

Calculer un taux d'évolution moyen

Exercice 3. Taux d'évolution moyen

1. La consommation électrique d'un site industriel a augmenté de 4 % la première année, de 7 % la deuxième et a baissé de 2 % la troisième. Calculer le taux d'évolution annuel moyen.

$C = 1,04 \times 1,07 \times 0,98 \approx 1,0905$; $t_m = C^{1/3} - 1 \approx 0,0293$ soit environ 2,93 % par an.

2. Si ce taux moyen se maintient, quelle sera l'évolution globale sur 10 ans?

$1,0293^{10} - 1 \approx 0,335$ soit environ +33,5 %.

3. Le rendement d'un panneau solaire baisse de 0,5 % par an. Quel est le pourcentage de baisse au bout de 25 ans?

$0,995^{25} \approx 0,882$: baisse d'environ 11,8 %.

4. Un loyer passe de 650 € à 740 € en 6 ans. Calculer le taux annuel moyen.

$\left(\frac{740}{650}\right)^{1/6} - 1 \approx 0,0218$ soit environ 2,18 % par an.

Dériver une fonction comportant une exponentielle et étudier ses variations

Exercice 4. Dérivées

Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3e^x - x^2$

$$f'(x) = 3e^x - 2x$$

2. $g(x) = 5e^{-0,2x}$

$$g'(x) = -e^{-0,2x}$$

3. $h(x) = xe^x$

$$h'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$$

4. $k(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$

$$k'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} = -(x - 1)^2 e^{-x}$$

5. $m(x) = e^{3x-1} + 4x$

$$m'(x) = 3e^{3x-1} + 4$$

6. $p(x) = (2x - 5)e^{0,5x}$

$$p'(x) = 2e^{0,5x} + 0,5(2x - 5)e^{0,5x} = (x - 0,5)e^{0,5x}$$

Exercice 5. Étude d'une fonction

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)e^x$.

1. Montrer que $f'(x) = (x - 1)e^x$.

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x - 2)e^x = (x - 1)e^x.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

$e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$. f est décroissante sur $] -\infty ; 1]$, croissante sur $[1 ; +\infty[$; minimum $f(1) = -e \approx -2,72$.

3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

En $+\infty$: $x - 2 \rightarrow +\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow +\infty$. En $-\infty$: $f(x) = xe^x - 2e^x \rightarrow 0 - 0 = 0$ (croissances comparées).

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

$$f(0) = -2, f'(0) = -1 : y = -x - 2.$$

5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et étudier le signe de f .

$e^x > 0$ donc $f(x) = 0 \iff x = 2$; $f(x) < 0$ sur $] -\infty ; 2[$ et $f(x) > 0$ sur $]2 ; +\infty[$.

6. Combien de solutions l'équation $f(x) = -1$ admet-elle? Justifier à l'aide du tableau de variations.

Sur $] -\infty ; 1]$, f décroît de 0 (limite) à $-e$: une solution. Sur $[1 ; +\infty[$, f croît de $-e$ à $+\infty$: une solution. Soit 2 solutions.

Exercice 6. Limites

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 3e^{-x})$
4

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x)$
 $-\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$
 $+\infty$ (croissances comparées)

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$
0 (croissances comparées)

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 5x)$
 $x \left(\frac{e^x}{x} - 5 \right) \rightarrow +\infty$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)e^{-x}$
 $\frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1 + e^x}$
 $e^x \rightarrow 0$: limite 3

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + e^x}$
 $1 + e^x \rightarrow +\infty$: limite 0

9. Interpréter graphiquement les deux dernières limites.

La courbe de $x \mapsto \frac{3}{1+e^x}$ admet deux asymptotes horizontales : $y = 3$ en $-\infty$ et $y = 0$ en $+\infty$.

Modéliser un phénomène par une fonction exponentielle

Exercice 7. Refroidissement d'un composant

La température (en °C) d'un composant électronique après l'arrêt d'un appareil est modélisée par $\theta(t) = 20 + 60e^{-0,1t}$, t en minutes.

1. Quelle est la température initiale?

$$\theta(0) = 80 \text{ °C.}$$

2. Calculer $\theta'(t)$ et en déduire le sens de variation de θ .

$$\theta'(t) = 60 \times (-0,1)e^{-0,1t} = -6e^{-0,1t} < 0 : \text{la température diminue.}$$

3. Déterminer la limite de θ en $+\infty$. Interpréter.

$e^{-0,1t} \rightarrow 0$ donc $\theta(t) \rightarrow 20$: la température se stabilise à 20 °C (température ambiante).

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de minutes entières la température passe sous 30 °C.

$$\theta(17) \approx 30,96 \text{ et } \theta(18) \approx 29,92 : \text{au bout de 18 minutes.}$$

5. Calculer la vitesse de refroidissement $\theta'(0)$ à l'instant initial, puis $\theta'(10)$. Commenter.

$$\theta'(0) = -6 \text{ °C/min; } \theta'(10) = -6e^{-1} \approx -2,21 \text{ °C/min : le refroidissement ralentit.}$$

6. Le composant peut être manipulé sous 25 °C. Résoudre $\theta(t) < 25$ à l'aide de la calculatrice.

$$60e^{-0,1t} < 5 \iff e^{-0,1t} < \frac{1}{12} : \theta(24) \approx 25,44 \text{ et } \theta(25) \approx 24,92, \text{ à partir de 25 minutes.}$$