

Corrigé

Intégration

Calculer une dérivée, une primitive

Exercice 1.

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = 6x - 4$

2. $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $f(x) = 2x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 1$

4. $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

5. $f(x) = x^4 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x$

6. $f(x) = \sin(x) + 5\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \cos(x) + \frac{5}{2\sqrt{x}}$

7. $f(x) = \cos(x) - \sin(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) - \cos(x)$

8. $f(x) = x \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$

9. $f(x) = x\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

10. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \times x - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

11. $f(x) = 5x \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 5 \cos(x) - 5x \sin(x)$

12. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

Exercice 2.

1. $f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = x^3$

2. $f(x) = 4x + 5 \Rightarrow F(x) = 2x^2 + 5x$

$$3. f(x) = x^3 - 2x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$$

$$4. f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x)$$

$$5. f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x)$$

$$6. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$$

$$7. f(x) = x^4 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{5}x^5$$

$$8. f(x) = 7 \Rightarrow F(x) = 7x$$

$$9. f(x) = x^5 - 7x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{7}{4}x^4$$

$$10. f(x) = -x^2 + 5 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 5x$$

$$11. f(x) = (x+1)(x+2) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x$$

$$12. f(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{1/2} \Rightarrow F(x) = \frac{4}{3}x^{3/2}$$

Exercise 3.

$$1. f(x) = 3x^2 \quad F(x) = x^3 + 9 \\ \text{car } F(1) = 1 + c = 10 \Rightarrow c = 9.$$

$$2. f(x) = 4x + 5 \quad F(x) = 2x^2 + 5x + 3 \\ \text{car } 2 + 5 + c = 10 \Rightarrow c = 3.$$

$$3. f(x) = x^3 - 2x \quad F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{43}{4} \\ \text{car } \frac{1}{4} - 1 + c = 10 \Rightarrow c = \frac{43}{4}.$$

$$4. f(x) = \sin(x) \quad F(x) = -\cos(x) + 10 + \cos(1) \\ \text{car } F(1) = -\cos(1) + c = 10 \Rightarrow c = 10 + \cos(1).$$

$$5. f(x) = \cos(x) \quad F(x) = \sin(x) + 10 - \sin(1) \\ \text{car } F(1) = \sin(1) + c = 10 \Rightarrow c = 10 - \sin(1).$$

6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad F(x) = 2\sqrt{x} + 8$
 car $F(1) = 2 + c = 10 \Rightarrow c = 8$.

7. $f(x) = x^4 \quad F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{49}{5}$
 car $\frac{1}{5} + c = 10 \Rightarrow c = \frac{49}{5}$.

8. $f(x) = 7 \quad F(x) = 7x + 3$
 car $7 + c = 10 \Rightarrow c = 3$.

9. $f(x) = x^5 - 7x^3 \quad F(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{7x^4}{4} + \frac{139}{12}$
 car $\frac{1}{6} - \frac{7}{4} + c = 10 \Rightarrow c = \frac{139}{12}$.

10. $f(x) = -x^2 + 5 \quad F(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x + \frac{16}{3}$
 car $-\frac{1}{3} + 5 + c = 10 \Rightarrow c = \frac{16}{3}$.

11. $f(x) = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{37}{6}$$

car $\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 + c = 10 \Rightarrow c = 10 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{37}{6}$.

12. $f(x) = 2\sqrt{x} \quad F(x) = \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{26}{3}$
 car $\frac{4}{3} + c = 10 \Rightarrow c = \frac{26}{3}$.

Aires et intégrales

Exercice 4.

1. Sur l'intervalle $[0, 3]$, on compte environ 5 carreaux et demi sous la courbe. Par conséquent, une valeur approchée de l'intégrale est environ 5,5. Un encadrement possible : entre 5 et 6.
2. Sur $[3, 6]$, on compte environ 2,5 carreaux pleins sous la courbe. L'intégrale est donc environ égale à 2,5. Un encadrement raisonnable est entre 2 et 3.
3. Sur $[0, 6]$, la somme des deux parties donne environ $5,5 + 2,5 = 8$. L'intégrale est donc approximativement 8, avec un encadrement entre 7 et 9.

4. Comme le graphique donne le coût en milliers d'euros par jour, la dépense approximative pour les trois premiers jours est de

$$5,5 \times 1000 = 5500 \text{ euros.}$$

Pour les trois jours suivants, la dépense est environ

$$2,5 \times 1000 = 2500 \text{ euros.}$$

Exercice 5.

1. L'aire entre 0 et 2 correspond à un rectangle de base 2 et de hauteur 3, donc :

$$\text{aire} = 2 \times 3 = 6.$$

2. L'aire entre 2 et 4 est celle d'un triangle de base 2 et de hauteur 2, donc :

$$\text{aire} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

3. L'aire entre 4 et 6 est celle d'un trapèze de hauteur 2 et de bases (petite et grande) 1 et 3, donc :

$$\text{aire} = \frac{(1+3)}{2} \times 2 = \frac{4}{2} \times 2 = 4.$$

4. L'intégrale de la fonction sur $[0, 6]$ est la somme des aires calculées :

$$\int_0^6 f(x) dx = 6 + 2 + 4 = 12.$$

Exercice 6.

1. $\int_0^5 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 5 + 8 = 13.$

2. $\int_0^5 g(x) dx = \int_0^3 g(x) dx + \int_3^5 g(x) dx = 7 + 4 = 11.$

3. $\int_0^2 h(x) dx = \int_0^5 h(x) dx - \int_3^5 h(x) dx - \int_2^3 h(x) dx = 10 - 12 - 3 = -5.$

4.

$$\int_0^3 (2f(x) + 3g(x)) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx + 3 \int_0^3 g(x) dx.$$

Avec $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = 5 + 1 = 6$, on obtient

$$2 \times 6 + 3 \times 7 = 12 + 21 = 33.$$

5.

$$\int_2^5 (f(x) - h(x)) dx = \int_2^5 f(x) dx - \int_2^3 h(x) dx - \int_3^5 h(x) dx = 8 - 3 - 12 = -7.$$

6.

$$\int_0^5 (f(x) + g(x) + h(x)) dx = \int_0^5 f(x) dx + \int_0^5 g(x) dx + \int_0^5 h(x) dx.$$

Sachant que $\int_0^5 g(x) dx = 11$ (voir question 2), cela donne

$$13 + 11 + 10 = 34.$$

7.

$$\int_3^5 (4g(x) - 2f(x)) dx = 4 \int_3^5 g(x) dx - 2 \int_3^5 f(x) dx.$$

Or $\int_3^5 f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = 8 - 1 = 7$, donc

$$4 \times 4 - 2 \times 7 = 16 - 14 = 2.$$

8.

$$\int_0^5 (3f(x) - h(x)) dx = 3 \int_0^5 f(x) dx - \int_0^5 h(x) dx = 3 \times 13 - 10 = 39 - 10 = 29.$$

Calculs d'intégrales et valeurs moyennes

Exercice 7.

La fonction $f_1(t) = 2t + 1$.

1. Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^3 (2t + 1) dt = [t^2 + t]_0^3 = (9 + 3) - 0 = 12.$$

2. La zone correspond à l'aire sous la courbe entre $t = 0$ et $t = 3$.

3. Valeur moyenne sur $[0, 3]$:

$$\overline{f_1} = \frac{1}{3 - 0} \int_0^3 (2t + 1) dt = \frac{12}{3} = 4.$$

4. La quantité moyenne d'eau dans le réservoir entre 0 et 3 heures est donc de 4 litres.

Exercice 8.

La fonction $f_2(t) = -t^2 + 4t + 1$.

1. Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^4 (-t^2 + 4t + 1) dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 2t^2 + t \right]_0^4 = \left(-\frac{64}{3} + 32 + 4 \right) - 0 = \frac{-64 + 96 + 12}{3} = \frac{44}{3} \approx 14.67.$$

2. La zone correspond à l'aire sous la courbe entre $t = 0$ et $t = 4$.

3. Valeur moyenne sur $[0, 4]$:

$$\overline{f_2} = \frac{1}{4} \times \frac{44}{3} = \frac{11}{3} \approx 3.67.$$

4. La concentration moyenne du produit chimique dans le bassin est d'environ 3,67 mg/L durant ces 4 heures.

Exercice 9.

La fonction $f_3(t) = 0.5t^3 - 2t^2 + 3t + 1$.

1. Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^3 (0.5t^3 - 2t^2 + 3t + 1) dt = \left[\frac{0.5t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + t \right]_0^3.$$

Calculons les termes à $t = 3$:

$$\frac{0.5 \times 3^4}{4} = \frac{0.5 \times 81}{4} = \frac{40.5}{4} = 10.125,$$

$$-\frac{2 \times 27}{3} = -\frac{54}{3} = -18,$$

$$\frac{3 \times 9}{2} = \frac{27}{2} = 13.5,$$

$$+3 = 3.$$

La somme :

$$10.125 - 18 + 13.5 + 3 = 8.625.$$

2. La zone est sous la courbe entre $t = 0$ et $t = 3$.

3. Valeur moyenne sur $[0, 3]$:

$$\overline{f_3} = \frac{8.625}{3} = 2.875.$$

4. La vitesse moyenne du robot pendant ces 3 heures est de 2,875 m/s.

Exercice 10.

La fonction $f_4(t) = -0.3t^3 + t^2 - t + 2$.

1. Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^2 (-0.3t^3 + t^2 - t + 2) dt = \left[-0.075t^4 + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t \right]_0^2.$$

Calculons les termes à $t = 2$:

$$-0.075 \times 16 = -1.2,$$

$$\frac{8}{3} \approx 2.6667,$$

$$-\frac{4}{2} = -2,$$

$$+4 = 4.$$

La somme :

$$-1.2 + 2.6667 - 2 + 4 \approx 3.4667 \quad \left(\text{valeur exacte : } \frac{52}{15} \right).$$

2. La zone est l'aire sous la courbe entre 0 et 2.

3. Valeur moyenne sur $[0, 2]$:

$$\overline{f_4} = \frac{1}{2} \times \frac{52}{15} = \frac{26}{15} \approx 1.73.$$

4. La puissance moyenne consommée par la machine sur ces 2 heures est d'environ 1,73 kW.

Exercice 11.

La fonction $f_5(t) = 3 + 2 \sin(t)$.

1. Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^4 (3 + 2 \sin(t)) dt = [3t - 2 \cos(t)]_0^4 = 3 \times 4 - 2 \cos(4) - (0 - 2 \cos(0)) = 12 - 2 \cos(4) + 2.$$

Valeur approchée :

$$\cos(4) \approx -0.6536,$$

donc

$$\int_0^4 f_5(t) dt \approx 12 - 2 \times (-0.6536) + 2 = 12 + 1.3072 + 2 = 15.3072.$$

2. La zone est l'aire sous la courbe entre 0 et 4.

3. Valeur moyenne sur $[0, 4]$:

$$\overline{f_5} = \frac{15.3072}{4} = 3.8268.$$

4. La luminosité moyenne dans la serre est donc environ 3.83 lumens sur ces 4 heures.

Exercice 12.

La fonction $f_6(t) = 4 + 1.5 \cos(t)$.

1. Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^6 (4 + 1.5 \cos(t)) dt = [4t + 1.5 \sin(t)]_0^6 = 24 + 1.5 \sin(6).$$

Valeur approchée :

$$\sin(6) \approx -0.2794,$$

donc

$$\int_0^6 f_6(t) dt \approx 24 - 0.4191 = 23.5809.$$

2. La zone est sous la courbe entre 0 et 6.

3. Valeur moyenne sur $[0, 6]$:

$$\overline{f_6} = \frac{23.5809}{6} \approx 3.930.$$

4. La température moyenne dans l'élevage sur ces 6 heures est d'environ 3.93 °C.

Exercice 13.

La fonction $f_7(t) = \frac{5}{t^2}$, définie pour $t > 0$.

1. Calcul de l'intégrale sur $[1, 4]$ (car interdit en 0) :

$$\int_1^4 \frac{5}{t^2} dt = 5 \left[-\frac{1}{t} \right]_1^4 = 5 \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{15}{4} = 3.75.$$

2. La zone est l'aire sous la courbe entre 1 et 4.

3. Valeur moyenne sur $[1, 4]$:

$$\overline{f_7} = \frac{3.75}{3} = 1.25.$$

4. Le débit moyen d'eau dans cette canalisation sur $[1, 4]$ secondes est de 1,25 litres par seconde.