

Logarithmes

Utiliser les propriétés algébriques du logarithme

Exercice 1. Propriétés algébriques

Écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

1. $\ln 18$

3. $\ln \sqrt{6}$

5. $\ln \frac{1}{12}$

2. $\ln \frac{16}{9}$

4. $\ln 24$

6. $\ln(0,75)$

Simplifier : $A = \ln(e^5) - \ln(e^2)$ $B = e^{\ln 7} + \ln(1)$ $C = \log(500) + \log(2)$ $D = \ln(e^2 \sqrt{e})$ $E = e^{2\ln 3}$ $F = \log(0,001)$.

Écrire sous la forme d'un seul logarithme : $G = 2\ln 5 - \ln 10$ $H = \ln(x+1) + \ln(x-1)$ pour $x > 1$.

Résoudre des équations et inéquations à l'aide du logarithme

Exercice 2. Équations et inéquations

Résoudre dans l'intervalle indiqué ou dans $\mathbb{N}$.

1. $e^x = 12$

7. $\ln(2x-1) \leq 0$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

2. $e^{3x+1} = e^5$

8. $5e^{-0,2t} < 1$

3. $\ln(x) = 2$ sur $]0; +\infty[$

9. $3e^{2x} - 1 = 11$

4. $2^x = 100$

10. $\ln(x+3) = \ln(2x-1)$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

5. $1,02^n \geq 1,5$, $n \in \mathbb{N}$

11. $10^x = 0,05$

6. $0,85^n < 0,1$, $n \in \mathbb{N}$

12. $\ln x > -1$ sur $]0; +\infty[$

Étudier une fonction comportant un logarithme

Exercice 3. Étude de fonction

Soit f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 4\ln x$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{4(x-1)(x+1)}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.
3. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$.
4. En déduire que pour tout $x > 0$, $x^2 \geq 1 + 2\ln x$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse e .
6. Soit $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$. Montrer que $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ et dresser son tableau de variations.
7. En déduire le signe de g et la limite de g en $+\infty$.

Exercice 4. Décroissance radioactive

Le césium 137 a une demi-vie de 30 ans. Le nombre de noyaux est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ (t en années).

1. Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{30} \approx 0,0231$.
2. Quel pourcentage de noyaux reste-t-il après 10 ans?
3. Au bout de combien d'années restera-t-il moins de 1 % des noyaux initiaux?
4. Un échantillon contient 5×10^{20} noyaux. Combien en restera-t-il après 50 ans?
5. Calculer $N'(t)$ et interpréter son signe.

Exercice 5. pH et décibels

1. Le pH d'une solution est $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$. Calculer le pH d'une solution où $[\text{H}_3\text{O}^+] = 2 \times 10^{-4}$ mol/L. Que devient le pH si la concentration est multipliée par 10?
2. Le niveau sonore est $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12}$ W/m². Calculer L pour $I = 10^{-5}$ W/m², puis déterminer par combien est multipliée l'intensité lorsque le niveau augmente de 20 dB.
3. Une solution a un pH de 8,5. Calculer sa concentration en ions H_3O^+ .
4. Deux machines produisent chacune 80 dB. Quel est le niveau sonore lorsqu'elles fonctionnent ensemble?
5. Le seuil de douleur est 120 dB. Quelle intensité correspond à ce seuil?

Corrigé

