

Corrigé

Logarithmes

Utiliser les propriétés algébriques du logarithme

Exercice 1. Propriétés algébriques

Écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

1. $\ln 18$

$$\ln 2 + 2\ln 3$$

2. $\ln \frac{16}{9}$

$$4\ln 2 - 2\ln 3$$

3. $\ln \sqrt{6}$

$$\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3)$$

4. $\ln 24$

$$3\ln 2 + \ln 3$$

5. $\ln \frac{1}{12}$

$$-2\ln 2 - \ln 3$$

6. $\ln(0,75)$

$$\ln 3 - 2\ln 2$$

Simplifier : $A = \ln(e^5) - \ln(e^2)$ $B = e^{\ln 7} + \ln(1)$ $C = \log(500) + \log(2)$ $D = \ln(e^2 \sqrt{e})$ $E = e^{2\ln 3}$ $F = \log(0,001)$.

$$A = 3; B = 7; C = \log 1000 = 3; D = 2 + \frac{1}{2} = 2,5; E = e^{\ln 9} = 9; F = -3.$$

Écrire sous la forme d'un seul logarithme : $G = 2\ln 5 - \ln 10$ $H = \ln(x+1) + \ln(x-1)$ pour $x > 1$.

$$G = \ln \frac{25}{10} = \ln 2,5; H = \ln(x^2 - 1).$$

Exercice 2. Équations et inéquations

Résoudre dans l'intervalle indiqué ou dans $\mathbb{N}$.

1. $e^x = 12$

$$x = \ln 12 \approx 2,48$$

2. $e^{3x+1} = e^5$

$$3x + 1 = 5, x = \frac{4}{3}$$

3. $\ln(x) = 2$ sur $]0; +\infty[$

$$x = e^2 \approx 7,39$$

4. $2^x = 100$

$$x = \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 6,64$$

5. $1,02^n \geq 1,5, n \in \mathbb{N}$

$$n \geq \frac{\ln 1,5}{\ln 1,02} \approx 20,5 : n \geq 21$$

6. $0,85^n < 0,1, n \in \mathbb{N}$

$$n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,85} \approx 14,2 : n \geq 15$$

7. $\ln(2x-1) \leq 0$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$0 < 2x-1 \leq 1 : x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right]$$

8. $5e^{-0,2t} < 1$

$$-0,2t < \ln 0,2 : t > -5 \ln 0,2 \approx 8,05$$

9. $3e^{2x} - 1 = 11$

$$e^{2x} = 4, x = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2 \approx 0,69$$

10. $\ln(x+3) = \ln(2x-1)$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$x+3 = 2x-1, x = 4 \text{ (qui convient)}$$

11. $10^x = 0,05$

$$x = \log 0,05 \approx -1,30$$

12. $\ln x > -1$ sur $]0 ; +\infty[$

$$x > e^{-1} \approx 0,37$$

Étudier une fonction comportant un logarithme

Exercice 3. Étude de fonction

Soit f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 4\ln x$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{4(x-1)(x+1)}{x}$.

$$f'(x) = 4x - \frac{4}{x} = \frac{4x^2 - 4}{x} = \frac{4(x-1)(x+1)}{x}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$ et $x + 1 > 0$: f' est du signe de $x - 1$. f décroissante sur $]0 ; 1]$, croissante sur $[1 ; +\infty[$; minimum $f(1) = 2$.

3. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$.

En 0^+ : $2x^2 \rightarrow 0$ et $-4\ln x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: $f(x) = x^2 \left(2 - 4\frac{\ln x}{x^2}\right) \rightarrow +\infty$ car $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \rightarrow 0$.

4. En déduire que pour tout $x > 0$, $x^2 \geq 1 + 2\ln x$.

Le minimum de f est 2 : $2x^2 - 4\ln x \geq 2$, donc $x^2 - 2\ln x \geq 1$.

5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse e .

$f(e) = 2e^2 - 4$, $f'(e) = 4e - \frac{4}{e}$: $y = \left(4e - \frac{4}{e}\right)(x - e) + 2e^2 - 4$, soit $y = \left(4e - \frac{4}{e}\right)x - 2e^2$.

6. Soit $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$. Montrer que $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ et dresser son tableau de variations.

$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, du signe de $1 - \ln x$: positif sur $]0 ; e]$, négatif ensuite. g croissante sur $]0 ; e]$, décroissante sur $[e ; +\infty[$, maximum $g(e) = \frac{1}{e}$.

7. En déduire le signe de g et la limite de g en $+\infty$.

$g(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$, $g(1) = 0$, $g(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (croissances comparées).

Modéliser à l'aide du logarithme : radioactivité, pH, décibels

Exercice 4. Décroissance radioactive

Le césium 137 a une demi-vie de 30 ans. Le nombre de noyaux est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ (t en années).

1. Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{30} \approx 0,0231$.

$$N(30) = \frac{N_0}{2} \iff e^{-30\lambda} = \frac{1}{2} \iff -30\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{30}.$$

2. Quel pourcentage de noyaux reste-t-il après 10 ans?

$$e^{-10\lambda} = 2^{-1/3} \approx 0,794 : \text{environ } 79,4 \, \%.$$

3. Au bout de combien d'années restera-t-il moins de 1 % des noyaux initiaux?

$$e^{-\lambda t} < 0,01 \iff t > \frac{\ln 100}{\lambda} = \frac{30 \ln 100}{\ln 2} \approx 199,3 : \text{environ } 200 \text{ ans.}$$

4. Un échantillon contient 5×10^{20} noyaux. Combien en restera-t-il après 50 ans?

$$5 \times 10^{20} \times e^{-50\lambda} = 5 \times 10^{20} \times 2^{-5/3} \approx 1,57 \times 10^{20} \text{ noyaux.}$$

5. Calculer $N'(t)$ et interpréter son signe.

$$N'(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} < 0 : \text{le nombre de noyaux diminue.}$$

Exercice 5. pH et décibels

1. Le pH d'une solution est $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$. Calculer le pH d'une solution où $[\text{H}_3\text{O}^+] = 2 \times 10^{-4} \text{ mol/L}$. Que devient le pH si la concentration est multipliée par 10?

$\text{pH} = -\log(2 \times 10^{-4}) = 4 - \log 2 \approx 3,7$. Si la concentration est multipliée par 10, le pH diminue de 1 : environ 2,7.

2. Le niveau sonore est $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Calculer L pour $I = 10^{-5} \text{ W/m}^2$, puis déterminer par combien est multipliée l'intensité lorsque le niveau augmente de 20 dB.

$L = 10 \log(10^7) = 70 \text{ dB}$. $+20 \text{ dB} \iff \log\left(\frac{I'}{I}\right) = 2 \iff I' = 100I$: l'intensité est multipliée par 100.

3. Une solution a un pH de 8,5. Calculer sa concentration en ions H_3O^+ .

$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-8,5} \approx 3,16 \times 10^{-9} \text{ mol/L}$.

4. Deux machines produisent chacune 80 dB. Quel est le niveau sonore lorsqu'elles fonctionnent ensemble?

L'intensité double : $L = 80 + 10 \log 2 \approx 83 \text{ dB}$.

5. Le seuil de douleur est 120 dB. Quelle intensité correspond à ce seuil?

$10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 120 \iff \frac{I}{10^{-12}} = 10^{12} \iff I = 1 \text{ W/m}^2$.