

Corrigé

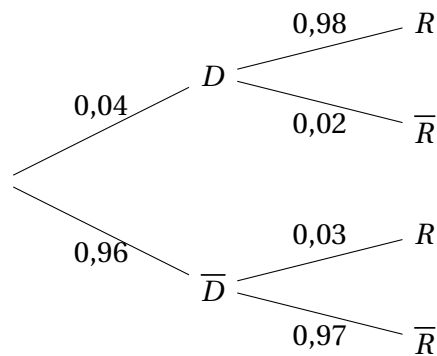
Probabilités conditionnelles

Construire un arbre pondéré et calculer des probabilités conditionnelles

Exercice 1. Contrôle de fabrication

Une entreprise fabrique des cartes électroniques. 4 % des cartes présentent un défaut. Un test de contrôle détecte 98 % des cartes défectueuses, mais rejette aussi à tort 3 % des cartes sans défaut. On note D : « la carte est défectueuse » et R : « la carte est rejetée ».

1. Construire un arbre pondéré.



2. Calculer la probabilité qu'une carte soit défectueuse et rejetée.

$$P(D \cap R) = 0,04 \times 0,98 = 0,0392.$$

3. Montrer que $P(R) = 0,068$.

$$P(R) = 0,0392 + 0,96 \times 0,03 = 0,0392 + 0,0288 = 0,068.$$

4. Une carte est rejetée. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement défectueuse ?

$$P_R(D) = \frac{0,0392}{0,068} \approx 0,576.$$

5. Une carte est acceptée. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

$$P(\bar{R}) = 0,932; P(D \cap \bar{R}) = 0,04 \times 0,02 = 0,0008; P_{\bar{R}}(D) = \frac{0,0008}{0,932} \approx 0,00086.$$

6. Sur 10 000 cartes produites, combien de cartes sans défaut sont rejetées à tort ?

$$0,96 \times 0,03 \times 10\,000 = 288 \text{ cartes.}$$

7. Une carte rejetée coûte 5 € et une carte défectueuse acceptée coûte 60 € (retour client). Calculer le coût moyen par carte lié au contrôle.

$$0,068 \times 5 + 0,0008 \times 60 = 0,34 + 0,048 = 0,388 \text{ € par carte.}$$

8. On améliore le test pour qu'il ne rejette plus que 1 % des cartes sans défaut. Calculer la nouvelle valeur de $P_R(D)$.

$$P(R) = 0,0392 + 0,96 \times 0,01 = 0,0488; P_R(D) = \frac{0,0392}{0,0488} \approx 0,803.$$

Étudier l'indépendance de deux événements

Exercice 2. Indépendance

1. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. A : « la carte est un as », B : « la carte est rouge ». A et B sont-ils indépendants ?

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} = \frac{1}{13} \times \frac{1}{2} : \text{oui.}$$

2. Dans un atelier de 200 salariés, 120 sont des hommes; 30 hommes et 20 femmes sont gauchers. Les événements « être un homme » et « être gaucher » sont-ils indépendants ?

$$P(H) = 0,6, P(G) = \frac{50}{200} = 0,25, P(H \cap G) = \frac{30}{200} = 0,15 = 0,6 \times 0,25 : \text{oui.}$$

3. A et B sont indépendants avec $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,6$. Calculer $P(A \cup B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$.

$$P(A \cap B) = 0,18; P(A \cup B) = 0,3 + 0,6 - 0,18 = 0,72; P(\bar{A} \cap B) = 0,7 \times 0,6 = 0,42.$$

4. Dans le jeu de 52 cartes, C : « la carte est une figure (valet, dame, roi) » et D : « la carte est un cœur ». Étudier l'indépendance de C et D .

$$P(C) = \frac{12}{52}, P(D) = \frac{1}{4}, P(C \cap D) = \frac{3}{52} = \frac{12}{52} \times \frac{1}{4} : \text{indépendants.}$$

5. Dans l'atelier, 40 des 80 femmes portent des lunettes, contre 45 hommes sur 120. Les événements « être une femme » et « porter des lunettes » sont-ils indépendants ?

$$P_F(L) = \frac{40}{80} = 0,5 \text{ et } P(L) = \frac{85}{200} = 0,425 : P_F(L) \neq P(L), \text{ non indépendants.}$$

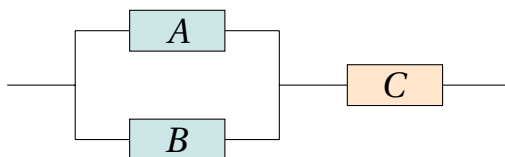
6. Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(\bar{A})P(B).$$

Calculer la fiabilité d'un système de composants indépendants

Exercice 3. Fiabilité d'un circuit

Un circuit comporte trois composants A , B , C fonctionnant de manière indépendante, avec les probabilités respectives 0,9; 0,8 et 0,95. A et B sont montés en parallèle, et ce bloc est monté en série avec C .



1. Calculer la probabilité que le bloc $\{A, B\}$ fonctionne.

$$1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,1 \times 0,2 = 0,98.$$

2. En déduire la probabilité que le circuit fonctionne.

$$0,98 \times 0,95 = 0,931.$$

3. Le circuit est en panne. Quelle est la probabilité que ce soit uniquement à cause de C (le bloc $\{A, B\}$ fonctionnant) ?

$$P(\text{panne}) = 1 - 0,931 = 0,069; P(\{A, B\} \text{ fonctionne} \cap \overline{C}) = 0,98 \times 0,05 = 0,049;$$

probabilité $\frac{0,049}{0,069} \approx 0,710$.

4. Quelle serait la probabilité de fonctionnement si les trois composants étaient montés en série ?

$$0,9 \times 0,8 \times 0,95 = 0,684 : \text{le montage en parallèle améliore nettement la fiabilité.}$$

5. On ajoute en parallèle de C un composant C' identique à C . Calculer la nouvelle probabilité de fonctionnement.

$$\text{Bloc } \{C, C'\} : 1 - 0,05^2 = 0,9975; \text{circuit} : 0,98 \times 0,9975 \approx 0,9776.$$

6. Combien de composants identiques de fiabilité 0,8 faut-il monter en parallèle pour que le bloc fonctionne avec une probabilité d'au moins 0,999 ?

$$1 - 0,2^n \geq 0,999 \iff 0,2^n \leq 0,001 : 0,2^4 = 0,0016 \text{ et } 0,2^5 = 0,00032, \text{ il en faut } 5.$$

Modéliser un jeu par un arbre et comparer des probabilités

Exercice 4. Les trois dés non transitifs

On dispose de trois dés équilibrés dont les faces sont : dé A : 3, 3, 3, 3, 3, 6; dé B : 2, 2, 2, 5, 5, 5; dé C : 1, 4, 4, 4, 4, 4.

Deux joueurs choisissent chacun un dé et le lancent; le plus grand résultat gagne.

1. Montrer à l'aide d'un arbre que la probabilité que A batte B est $\frac{7}{12}$.

A gagne si $A = 6$ (probabilité $\frac{1}{6}$) ou si $A = 3$ et $B = 2$ ($\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$). Total $\frac{2}{12} + \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$.

2. Calculer la probabilité que B batte C , puis que C batte A .

B bat C : $B = 5$ ($\frac{1}{2}$) ou $B = 2$ et $C = 1$ ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$) : $\frac{7}{12}$.

C bat A : $C = 4$ et $A = 3$: $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

3. Quel dé vaut-il mieux choisir si l'on joue en second? Commenter.

Chaque dé est battu par un autre avec une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$: A bat B , B bat C et C bat A . Le second joueur choisit toujours le dé qui bat celui de l'adversaire : il n'existe pas de « meilleur dé ».

4. On note X le résultat du dé A . Calculer l'espérance de X , puis celles des dés B et C . Commenter.

$E(A) = \frac{15+6}{6} = 3,5$; $E(B) = \frac{6+15}{6} = 3,5$; $E(C) = \frac{1+20}{6} = 3,5$. Les trois dés ont la même moyenne, et pourtant ils ne se valent pas deux à deux.

5. On joue 3 parties avec les dés A contre B . Quelle est la probabilité que A gagne les trois parties?

Parties indépendantes : $\left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{343}{1728} \approx 0,198$.

6. Quelle est la probabilité que A gagne au moins une des trois parties?

$1 - \left(\frac{5}{12}\right)^3 = 1 - \frac{125}{1728} \approx 0,928$.