

Statistiques à deux variables

Déterminer et exploiter un ajustement affine

Exercice 1. Consommation d'un véhicule

On a mesuré la consommation y (en L/100 km) d'un véhicule en fonction de sa vitesse stabilisée x (en km/h).

x_i	50	70	90	110	130	150
y_i	4,6	5,0	5,7	6,3	7,0	7,6

1. Représenter le nuage de points et calculer les coordonnées du point moyen G .
2. Un ajustement affine vous paraît-il pertinent? Tracer une droite « au jugé » passant par G .
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite des moindres carrés (coefficients arrondis au millième).
4. Estimer la consommation à 100 km/h puis à 170 km/h. Quelle estimation est la plus fiable?
5. Vérifier que la droite des moindres carrés passe par G .
6. Le conducteur veut consommer au plus 8 L/100 km. Quelle vitesse maximale le modèle lui conseille-t-il?
7. Interpréter le coefficient directeur de la droite.
8. Le coefficient de corrélation donné par la calculatrice est $r \approx 0,998$. Que peut-on en conclure?

Comprendre la méthode des moindres carrés

Exercice 2. Minimiser la somme des carrés

On considère les points $A(1 ; 2)$, $B(2 ; 3)$ et $C(3 ; 5)$.

1. Pour la droite $d_1 : y = x + 1$, calculer la somme des carrés des résidus S_1 .
2. Même question pour $d_2 : y = 1,5x + 0,5$ et $d_3 : y = 1,5x + 0,33$.
3. Laquelle de ces droites approche le mieux les points au sens des moindres carrés? Comparer avec la calculatrice.
4. Calculer les coordonnées du point moyen G et vérifier que la droite des moindres carrés passe par G .
5. On cherche les droites de coefficient directeur 1,5 : $y = 1,5x + b$. Montrer que la somme des carrés des résidus vaut $S(b) = (0,5 - b)^2 + (-b)^2 + (0,5 - b)^2$.
6. Développer $S(b)$ et déterminer la valeur de b qui la rend minimale.

Utiliser un changement de variable pour se ramener à un ajustement affine

Exercice 3. Changement de variable $z = \ln y$

Le nombre y de bactéries (en milliers) dans une culture est relevé toutes les heures.

t_i (h)	0	1	2	3	4	5
y_i	2,0	3,1	4,4	6,9	10,1	15,2

1. Pourquoi un ajustement affine de y en t n'est-il pas adapté?
2. On pose $z = \ln y$. Compléter un tableau de valeurs de z (au centième) et représenter le nuage $(t_i ; z_i)$.
3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en t (coefficients au centième).
4. En déduire une expression de y de la forme $y = ke^{at}$ et estimer le nombre de bactéries au bout de 7 heures.
5. Selon ce modèle, au bout de combien de temps la population atteindra-t-elle 50 000 bactéries?
6. Déterminer le temps de doublement de la population.
7. Quel est le pourcentage d'augmentation horaire de la population?

Exercice 4. Changement de variable $z = \frac{1}{x}$

La résistance R (en Ω) d'un fil conducteur est mesurée pour différentes sections s (en mm^2).

s_i	0,5	1	1,5	2,5	4
R_i	3,50	1,76	1,17	0,70	0,44

1. On pose $z = \frac{1}{s}$. Calculer les valeurs de z_i .
2. Déterminer l'ajustement affine de R en z . Que peut-on conjecturer?
3. Estimer la résistance d'un fil de section 6 mm^2 .
4. Représenter le nuage $(s_i ; R_i)$ puis le nuage $(z_i ; R_i)$. Lequel est le plus proche d'une droite?
5. Quelle section faut-il choisir pour que la résistance soit inférieure à $0,25 \Omega$?
6. La résistance d'un fil de longueur L est $R = \rho \frac{L}{s}$. Pour un fil en cuivre de 100 m , $\rho \approx 0,0175 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$. Le modèle obtenu est-il cohérent?

