

Corrigé

Statistiques à deux variables

Déterminer et exploiter un ajustement affine

Exercice 1. Consommation d'un véhicule

On a mesuré la consommation y (en L/100 km) d'un véhicule en fonction de sa vitesse stabilisée x (en km/h).

x_i	50	70	90	110	130	150
y_i	4,6	5,0	5,7	6,3	7,0	7,6

1. Représenter le nuage de points et calculer les coordonnées du point moyen G .

$$\bar{x} = 100; \bar{y} = \frac{36,2}{6} \approx 6,03. G(100; 6,03).$$

2. Un ajustement affine vous paraît-il pertinent? Tracer une droite « au jugé » passant par G .

Oui, les points sont presque alignés.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite des moindres carrés (coefficients arrondis au millième).

$$y \approx 0,031x + 2,948.$$

4. Estimer la consommation à 100 km/h puis à 170 km/h. Quelle estimation est la plus fiable?

À 100 km/h : $\approx 6,03$ L/100 km (interpolation, fiable). À 170 km/h : $\approx 8,2$ L/100 km (extrapolation, moins fiable).

5. Vérifier que la droite des moindres carrés passe par G .

$0,031 \times 100 + 2,948 \approx 6,05$, proche de 6,03 (écart dû aux arrondis; avec les valeurs exactes l'égalité est vérifiée).

6. Le conducteur veut consommer au plus 8 L/100 km. Quelle vitesse maximale le modèle lui conseille-t-il?

$$0,031x + 2,948 \leq 8 \iff x \leq \frac{5,052}{0,031} \approx 163 \text{ km/h.}$$

7. Interpréter le coefficient directeur de la droite.

Chaque augmentation de 10 km/h fait augmenter la consommation d'environ 0,31 L/100 km.

8. Le coefficient de corrélation donné par la calculatrice est $r \approx 0,998$. Que peut-on en conclure?

r est très proche de 1 : la corrélation linéaire est très forte, l'ajustement affine est pertinent.

Comprendre la méthode des moindres carrés

Exercice 2. Minimiser la somme des carrés

On considère les points $A(1 ; 2)$, $B(2 ; 3)$ et $C(3 ; 5)$.

1. Pour la droite $d_1 : y = x + 1$, calculer la somme des carrés des résidus S_1 .

Résidus : $2 - 2 = 0$; $3 - 3 = 0$; $5 - 4 = 1$. $S_1 = 1$.

2. Même question pour $d_2 : y = 1,5x + 0,5$ et $d_3 : y = 1,5x + 0,33$.

d_2 : résidus 0 ; $-0,5$; 0 : $S_2 = 0,25$. d_3 : résidus $0,17$; $-0,33$; $0,17$: $S_3 \approx 0,1667$.

3. Laquelle de ces droites approche le mieux les points au sens des moindres carrés? Comparer avec la calculatrice.

d_3 . La calculatrice donne $y = 1,5x + \frac{1}{3}$: c'est la droite des moindres carrés ($S = \frac{1}{6}$).

4. Calculer les coordonnées du point moyen G et vérifier que la droite des moindres carrés passe par G .

$G(2 ; \frac{10}{3})$ et $1,5 \times 2 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$: oui.

5. On cherche les droites de coefficient directeur 1,5 : $y = 1,5x + b$. Montrer que la somme des carrés des résidus vaut $S(b) = (0,5 - b)^2 + (-b)^2 + (0,5 - b)^2$.

Résidus : $2 - (1,5 + b) = 0,5 - b$; $3 - (3 + b) = -b$; $5 - (4,5 + b) = 0,5 - b$.

6. Développer $S(b)$ et déterminer la valeur de b qui la rend minimale.

$S(b) = 3b^2 - 2b + 0,5$; c'est un polynôme du second degré de sommet $b = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$: on retrouve la droite des moindres carrés.

Utiliser un changement de variable pour se ramener à un ajustement affine

Exercice 3. Changement de variable $z = \ln y$

Le nombre y de bactéries (en milliers) dans une culture est relevé toutes les heures.

t_i (h)	0	1	2	3	4	5
y_i	2,0	3,1	4,4	6,9	10,1	15,2

1. Pourquoi un ajustement affine de y en t n'est-il pas adapté?

Le nuage est courbé : les accroissements augmentent.

2. On pose $z = \ln y$. Compléter un tableau de valeurs de z (au centième) et représenter le nuage $(t_i ; z_i)$.

z : 0,69 ; 1,13 ; 1,48 ; 1,93 ; 2,31 ; 2,72. Le nuage est presque aligné.

3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en t (coefficients au centième).

$$z \approx 0,40t + 0,70.$$

4. En déduire une expression de y de la forme $y = ke^{at}$ et estimer le nombre de bactéries au bout de 7 heures.

$$y = e^{0,70} e^{0,40t} \approx 2,01 e^{0,40t}. \text{ Pour } t = 7 : y \approx 2,01 e^{2,8} \approx 33 \text{ milliers.}$$

5. Selon ce modèle, au bout de combien de temps la population atteindra-t-elle 50 000 bactéries?

$$2,01 e^{0,4t} = 50 \iff t = \frac{\ln(50/2,01)}{0,4} \approx 8,03 \text{ h, soit environ 8 heures.}$$

6. Déterminer le temps de doublement de la population.

$$e^{0,4t} = 2 \iff t = \frac{\ln 2}{0,4} \approx 1,73 \text{ h, soit environ 1 h 44 min.}$$

7. Quel est le pourcentage d'augmentation horaire de la population?

$$e^{0,4} \approx 1,492 : \text{environ } +49 \% \text{ par heure.}$$

Exercice 4. Changement de variable $z = \frac{1}{x}$

La résistance R (en Ω) d'un fil conducteur est mesurée pour différentes sections s (en mm^2).

s_i	0,5	1	1,5	2,5	4
R_i	3,50	1,76	1,17	0,70	0,44

1. On pose $z = \frac{1}{s}$. Calculer les valeurs de z_i .

$z : 2; 1; 0,67; 0,4; 0,25$.

2. Déterminer l'ajustement affine de R en z . Que peut-on conjecturer?

$R \approx 1,75z + 0,004 \approx 1,75z$, soit $R \approx \frac{1,75}{s}$: la résistance est inversement proportionnelle à la section.

3. Estimer la résistance d'un fil de section 6 mm^2 .

$R \approx \frac{1,75}{6} \approx 0,29 \Omega$.

4. Représenter le nuage $(s_i; R_i)$ puis le nuage $(z_i; R_i)$. Lequel est le plus proche d'une droite?

Le premier nuage a l'allure d'une branche d'hyperbole; le second est presque aligné sur une droite passant par l'origine.

5. Quelle section faut-il choisir pour que la résistance soit inférieure à $0,25 \Omega$?

$\frac{1,75}{s} < 0,25 \iff s > 7 \text{ mm}^2$.

6. La résistance d'un fil de longueur L est $R = \rho \frac{L}{s}$. Pour un fil en cuivre de 100 m , $\rho \approx 0,0175 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$. Le modèle obtenu est-il cohérent?

$\rho L = 0,0175 \times 100 = 1,75$: on retrouve $R = \frac{1,75}{s}$, le modèle est cohérent avec la loi physique.