

Suites numériques

Corrigé

Les résultats numériques sont arrondis lorsque cela est nécessaire.

Exercice 1. Diagnostic : identifier une suite

- | | |
|--|--|
| 1. Arithmétique, de raison $r = 5$. | les écarts sont 3, 5 et 7, tandis que les quotients ne sont pas constants. |
| 2. Géométrique, de raison $q = 2$. | |
| 3. Géométrique, de raison $q = \frac{1}{3}$. | |
| 4. Les deux : arithmétique de raison 0 et géométrique de raison 1. | 7. Géométrique, de raison $q = 0,95$ car $950 = 1000 \times 0,95$, $902,50 = 950 \times 0,95$ et $857,375 = 902,50 \times 0,95$. |
| 5. Arithmétique, de raison $r = -8$. | |
| 6. Ni arithmétique ni géométrique : | 8. Géométrique, de raison $q = -2$. |

Exercice 2. Maintenance préventive d'un réseau

1. Chaque année, le budget augmente d'un montant fixe de 1 250 €. La suite (u_n) est donc arithmétique, avec :

$$u_0 = 18\,000 \quad \text{et} \quad r = 1\,250.$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = 18\,000 + 1\,250n.$$

3. L'année 2030 correspond à $n = 4$:

$$u_4 = 18\,000 + 1\,250 \times 4 = 23\,000.$$

En 2038, $n = 12$:

$$u_{12} = 18\,000 + 1\,250 \times 12 = 33\,000.$$

4. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$18\,000 + 1\,250n > 30\,000.$$

Ainsi $1\,250n > 12\,000$, soit $n > 9,6$. Le plus petit entier convenable est $n = 10$.

Le budget dépasse 30 000 € à partir de l'année $2026 + 10$, soit **2036**.

5. De 2026 à 2035 inclus, il y a 10 termes, de u_0 à u_9 .

$$u_9 = 18\,000 + 1\,250 \times 9 = 29\,250.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^9 u_k = \frac{10(18\,000 + 29\,250)}{2} = 236\,250.$$

Le budget total est de 236 250 €.

Exercice 3. Dégradation d'une batterie

1. Une perte de 3,5 % correspond à une multiplication par :

$$q = 1 - \frac{3,5}{100} = 0,965.$$

La suite (c_n) est géométrique de premier terme $c_0 = 64$ et de raison $q = 0,965$.

2. Pour tout entier naturel n :

$$c_n = 64 \times 0,965^n.$$

- 3.

$$c_5 = 64 \times 0,965^5 \approx 53,56.$$

Après 5 ans, la capacité est d'environ 53,6 kWh.

$$c_{12} = 64 \times 0,965^{12} \approx 41,74.$$

Après 12 ans, elle est d'environ 41,7 kWh.

4. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$64 \times 0,965^n < 48.$$

À la calculatrice, on obtient $n > 8,07$. Le premier entier convenable est $n = 9$.

La capacité devient inférieure à 48 kWh après 9 années d'utilisation.

- 5.

$$\sum_{k=0}^9 c_k = 64 \times \frac{1 - 0,965^{10}}{1 - 0,965} \approx 548,06.$$

Cette somme représente la somme des capacités maximales théoriques observées de l'état initial à la fin de la 9^e année ; elle s'exprime ici en kWh, mais elle ne correspond pas directement à une énergie produite sans préciser un usage ou une durée de fonctionnement.

Exercice 4. Production d'un atelier

1. La production augmente de 4 % chaque semaine : elle est donc multipliée par 1,04. La suite (p_n) est géométrique, avec :

$$p_0 = 2\,400 \quad \text{et} \quad q = 1,04.$$

2.

$$p_n = 2400 \times 1,04^n.$$

3. La 20^e semaine correspond à $n = 19$:

$$p_{19} = 2400 \times 1,04^{19} \approx 5056.$$

L'atelier produit environ 5056 pièces lors de la 20^e semaine.

4. Les 20 premières semaines correspondent aux termes p_0 à p_{19} :

$$\sum_{k=0}^{19} p_k = 2400 \times \frac{1 - 1,04^{20}}{1 - 1,04} \approx 71\,467.$$

Au total, l'atelier produit environ 71 467 pièces pendant les 20 premières semaines.

5. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$2400 \times 1,04^n > 5000.$$

À la calculatrice, on obtient $n > 18,71$. Le premier entier convenable est $n = 19$.

Le seuil est donc dépassé à la 20^e semaine.

Exercice 5. Comparaison de deux stratégies d'investissement

1. La suite (a_n) est arithmétique de premier terme $a_0 = 8000$ et de raison 600 :

$$a_n = 8000 + 600n.$$

La suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 8000$ et de raison 1,05 :

$$b_n = 8000 \times 1,05^n.$$

2. L'année 2031 correspond à $n = 5$:

$$a_5 = 8000 + 600 \times 5 = 11\,000.$$

$$b_5 = 8000 \times 1,05^5 \approx 10\,210,25.$$

En 2031, l'entreprise A investit donc 11 000 € et l'entreprise B environ 10 210,25 €.

3. De 2026 à 2035 inclus, il y a 10 termes.

$$a_9 = 8000 + 600 \times 9 = 13\,400.$$

$$\sum_{k=0}^9 a_k = \frac{10(8000 + 13400)}{2} = 107\,000.$$

$$\sum_{k=0}^9 b_k = 8000 \times \frac{1 - 1,05^{10}}{1 - 1,05} \approx 100\,623,14.$$

4. On cherche le plus petit entier n tel que $b_n > a_n$. Un tableau de valeurs donne notamment :

$$a_{16} = 17\,600 \quad \text{et} \quad b_{16} \approx 17\,463,00,$$

tandis que :

$$a_{17} = 18\,200 \quad \text{et} \quad b_{17} \approx 18\,336,15.$$

Ainsi, l'investissement annuel de l'entreprise B devient supérieur à celui de l'entreprise A à partir de $n = 17$, soit en **2043**.

5. La stratégie A est simple et prévisible : l'augmentation annuelle est constante. La stratégie B est plus modérée au début, mais l'effet cumulatif des pourcentages conduit à une hausse de plus en plus importante sur une longue période. Son principal inconvénient est que les montants peuvent devenir rapidement élevés.

Exercice 6. Consommation d'eau dans une usine

1. La consommation diminue de 35 m^3 chaque mois. La suite (w_n) est arithmétique, avec :

$$w_0 = 1\,500 \quad \text{et} \quad r = -35.$$

2.

$$w_n = 1\,500 - 35n.$$

3. Le douzième mois correspond à $n = 11$:

$$w_{11} = 1\,500 - 35 \times 11 = 1\,115.$$

La consommation prévue est de $1\,115 \text{ m}^3$.

4. La consommation annuelle est :

$$\sum_{k=0}^{11} w_k.$$

Or $w_{11} = 1\,115$, donc :

$$\sum_{k=0}^{11} w_k = \frac{12(1\,500 + 1\,115)}{2} = 15\,690.$$

La consommation totale annuelle est de $15\,690 \text{ m}^3$.

5. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$1\,500 - 35n < 1\,000.$$

Cela donne $-35n < -500$, soit $n > \frac{100}{7} \approx 14,29$. Le premier entier convenable est $n = 15$.

Le premier mois concerné est le mois de rang 16, c'est-à-dire le 4^e mois de l'année suivante si le premier mois est janvier.

Exercice 7. Rendement d'une installation photovoltaïque

1. Une baisse de 0,8 % correspond à une multiplication par :

$$q = 1 - \frac{0,8}{100} = 0,992.$$

Donc :

$$e_n = 12\,000 \times 0,992^n.$$

2. La 15^e année correspond à $n = 14$:

$$e_{14} = 12\,000 \times 0,992^{14} \approx 10\,724.$$

La production prévue est d'environ 10 724 kWh.

3. Les 20 premières années correspondent aux termes e_0 à e_{19} :

$$\sum_{k=0}^{19} e_k = 12\,000 \times \frac{1 - 0,992^{20}}{1 - 0,992} \approx 222\,606.$$

La production totale prévue est donc d'environ 222 606 kWh.

4. On cherche les années pour lesquelles :

$$12\,000 \times 0,992^n \geq 10\,000.$$

À la calculatrice, on obtient $n \leq 22,70$. Le plus grand entier convenable est $n = 22$.

La condition est satisfaite de $n = 0$ à $n = 22$, soit pendant **23 années**.

5. Une baisse de 0,8 % s'applique chaque année à la production de l'année précédente. La diminution absolue n'est donc pas constante : elle vaut 0,8 % d'une quantité qui diminue au fil des années. Il s'agit d'une suite géométrique et non d'une suite arithmétique.

Exercice 8. Épargne pour un projet technologique

1. Entre le début de deux années consécutives, le capital est d'abord multiplié par 1,024, puis l'association verse 1 200 €. Ainsi :

$$u_{n+1} = 1,024u_n + 1\,200.$$

2.

$$u_1 = 1,024 \times 2\,000 + 1\,200 = 3\,248.$$

$$u_2 = 1,024 \times 3\,248 + 1\,200 = 4\,525,952.$$

$$u_3 = 1,024 \times 4\,525,952 + 1\,200 \approx 5\,834,57.$$

3. Les différences ne sont pas constantes :

$$u_1 - u_0 = 1\,248 \quad \text{et} \quad u_2 - u_1 = 1\,277,952.$$

La suite n'est donc pas arithmétique.

Les quotients ne sont pas constants :

$$\frac{u_1}{u_0} = 1,624 \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} \approx 1,393.$$

La suite n'est donc pas géométrique.

4. Posons $v_n = u_n + 50\,000$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 50\,000 \\ &= 1,024u_n + 1\,200 + 50\,000 \\ &= 1,024u_n + 51\,200 \\ &= 1,024(u_n + 50\,000) \\ &= 1,024v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 1,024 et :

$$v_0 = u_0 + 50\,000 = 52\,000.$$

5. Ainsi :

$$v_n = 52\,000 \times 1,024^n.$$

Comme $u_n = v_n - 50\,000$, on obtient :

$$u_n = 52\,000 \times 1,024^n - 50\,000.$$

6. Le début de l'année 2036 correspond à $n = 10$:

$$u_{10} = 52\,000 \times 1,024^{10} - 50\,000 \approx 15\,917,83.$$

Le capital disponible est donc d'environ 15 917,83 €.

Exercice 9. Température régulée d'un procédé industriel

1. À l'instant n , l'écart à la température cible vaut $80 - u_n$. Après une minute, cet écart est réduit de 25 %; il reste donc 75 % de l'écart :

$$80 - u_{n+1} = 0,75(80 - u_n).$$

Par conséquent :

$$u_{n+1} = 80 - 0,75(80 - u_n) = 0,75u_n + 20.$$

2.

$$u_1 = 0,75 \times 20 + 20 = 35.$$

$$u_2 = 0,75 \times 35 + 20 = 46,25.$$

$$u_3 = 0,75 \times 46,25 + 20 = 54,6875.$$

3. Les écarts successifs sont :

$$u_1 - u_0 = 15, \quad u_2 - u_1 = 11,25.$$

Ils ne sont pas constants : la suite n'est pas arithmétique.

De plus :

$$\frac{u_1}{u_0} = 1,75 \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} \approx 1,321.$$

Les quotients ne sont pas constants : la suite n'est pas géométrique.

4. Posons $v_n = u_n - 80$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 80 \\ &= 0,75u_n + 20 - 80 \\ &= 0,75(u_n - 80) \\ &= 0,75v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 80 = 20 - 80 = -60.$$

5.

$$v_n = -60 \times 0,75^n.$$

Donc :

$$u_n = 80 - 60 \times 0,75^n.$$

6. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$80 - 60 \times 0,75^n \geq 79.$$

Cela équivaut à :

$$0,75^n \leq \frac{1}{60}.$$

À la calculatrice, on obtient $n \geq 14,23$. Le premier entier convenable est $n = 15$.

La température est supérieure ou égale à 79°C après **15 minutes**.

7. Comme $0 < 0,75 < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 80.$$

La température se rapproche progressivement de 80°C sans la dépasser dans ce modèle.