

Variables aléatoires discrètes finies

Déterminer une loi de probabilité et calculer une espérance

Exercice 1. Espérance

Un technicien intervient sur des pannes. La durée X (en heures) d'une intervention suit la loi :

x_i	1	2	3	5
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	a	0,1

1. Déterminer a .
2. Calculer $E(X)$ et interpréter.
3. L'intervention est facturée 60 € de déplacement plus 45 € par heure. Quel est le montant moyen d'une facture?
4. Calculer la probabilité qu'une intervention dure au moins 2 heures.
5. On note F le montant de la facture. Donner la loi de F et vérifier que $E(F) = 154,50$ €.
6. Le technicien fait 6 interventions par jour en moyenne. Quel chiffre d'affaires moyen réalise-t-il sur 20 jours?

Utiliser les coefficients binomiaux

Exercice 2. Coefficients binomiaux

1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 10$.
2. Donner $\binom{10}{3}$, $\binom{9}{4}$ et $\binom{10}{5}$. Vérifier avec la calculatrice.
3. Écrire en Python une fonction qui renvoie la ligne n du triangle de Pascal.
4. Vérifier sur un exemple la relation $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
5. Combien de chemins d'un arbre à 10 épreuves comportent exactement 2 échecs?
6. Calculer la somme des termes de la ligne 10. Interpréter.

Exercice 3. Loi binomiale : composants électroniques

Une usine produit des résistances; 3 % d'entre elles sont hors tolérance. On prélève un lot de 20 résistances (assimilé à un tirage avec remise). X désigne le nombre de résistances hors tolérance.

1. Justifier que X suit une loi binomiale; préciser ses paramètres.
2. Interpréter l'événement $\{X = 1\}$ sur un arbre : combien de chemins le réalisent?
3. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 20)$.
4. En déduire la probabilité qu'il y ait au moins 2 résistances hors tolérance.
5. Calculer $P(X = 3)$ avec la formule des coefficients binomiaux.
6. Calculer $E(X)$ et interpréter.
7. Un lot est refusé s'il contient au moins 2 résistances hors tolérance. Sur 500 lots, combien seront refusés en moyenne?
8. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,99$.

Exercice 4. QCM et $\{X = n - 1\}$

Un QCM comporte 10 questions, chacune avec 4 propositions dont une seule est correcte. Un candidat répond au hasard. X est le nombre de bonnes réponses.

1. Donner la loi de X et son espérance.
2. Calculer $P(X = 10)$ et $P(X = 9)$.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse.
4. Calculer $P(X = 5)$.
5. Chaque bonne réponse rapporte 2 points et chaque mauvaise en retire 0,5. On note N la note. Exprimer N en fonction de X et calculer $E(N)$.
6. Quel barème de pénalité m (points retirés par mauvaise réponse) rend l'espérance de la note nulle?
7. À l'aide de la calculatrice, calculer $P(X \geq 5)$.

Représenter une loi binomiale

Exercice 5. Diagramme en bâtons

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0,5)$.

1. Calculer $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 4.
2. Représenter la loi par un diagramme en bâtons. Que remarque-t-on?
3. Calculer $P(1 \leq X \leq 3)$.
4. On considère maintenant $Y \sim \mathcal{B}(4 ; 0,2)$. Calculer les $P(Y = k)$ et représenter la loi. Le diagramme est-il encore symétrique?
5. Quelle est la valeur de k la plus probable pour Y ? Comparer avec $E(Y)$.

Corrigé

