

Corrigé

Variables aléatoires discrètes finies

Déterminer une loi de probabilité et calculer une espérance

Exercice 1. Espérance

Un technicien intervient sur des pannes. La durée X (en heures) d'une intervention suit la loi :

x_i	1	2	3	5
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	a	0,1

1. Déterminer a .

$$a = 1 - 0,4 - 0,3 - 0,1 = 0,2.$$

2. Calculer $E(X)$ et interpréter.

$$E(X) = 0,4 + 0,6 + 0,6 + 0,5 = 2,1 : \text{une intervention dure en moyenne 2,1 h.}$$

3. L'intervention est facturée 60 € de déplacement plus 45 € par heure. Quel est le montant moyen d'une facture ?

$$60 + 45 \times 2,1 = 154,50 \text{ €.}$$

4. Calculer la probabilité qu'une intervention dure au moins 2 heures.

$$P(X \geq 2) = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6.$$

5. On note F le montant de la facture. Donner la loi de F et vérifier que $E(F) = 154,50 \text{ €}$.

F prend les valeurs 105 ; 150 ; 195 ; 285 avec les probabilités 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1.

$$E(F) = 42 + 45 + 39 + 28,5 = 154,5 \text{ €.}$$

6. Le technicien fait 6 interventions par jour en moyenne. Quel chiffre d'affaires moyen réalise-t-il sur 20 jours ?

$$154,50 \times 6 \times 20 = 18540 \text{ €.}$$

Exercice 2. Coefficients binomiaux

1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 10$.

Ligne 9 : 1 ; 9 ; 36 ; 84 ; 126 ; 126 ; 84 ; 36 ; 9 ; 1. Ligne 10 : 1 ; 10 ; 45 ; 120 ; 210 ; 252 ; 210 ; 120 ; 45 ; 10 ; 1.

2. Donner $\binom{10}{3}$, $\binom{9}{4}$ et $\binom{10}{5}$. Vérifier avec la calculatrice.
120 ; 126 ; 252.

3. Écrire en Python une fonction qui renvoie la ligne n du triangle de Pascal.

```
def pascal(n):  
    ligne = [1]  
    for i in range(n):  
        ligne = [1] + [ligne[k] + ligne[k+1] for k in range(len(ligne)-1)] + [1]  
    return ligne
```

4. Vérifier sur un exemple la relation $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
Par exemple $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 84 + 126 = 210 = \binom{10}{4}$.

5. Combien de chemins d'un arbre à 10 épreuves comportent exactement 2 échecs?
 $\binom{10}{2} = \binom{10}{8} = 45$ chemins.

6. Calculer la somme des termes de la ligne 10. Interpréter.
 $2^{10} = 1024$: c'est le nombre total de chemins d'un arbre à 10 épreuves à deux issues.

Exercice 3. Loi binomiale : composants électroniques

Une usine produit des résistances; 3 % d'entre elles sont hors tolérance. On prélève un lot de 20 résistances (assimilé à un tirage avec remise). X désigne le nombre de résistances hors tolérance.

1. Justifier que X suit une loi binomiale; préciser ses paramètres.

20 épreuves identiques et indépendantes à deux issues, succès « hors tolérance » de probabilité 0,03 : $X \sim \mathcal{B}(20 ; 0,03)$.

2. Interpréter l'événement $\{X = 1\}$ sur un arbre : combien de chemins le réalisent ?

Chemins avec exactement un succès parmi 20 épreuves : $\binom{20}{1} = 20$ chemins.

3. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 20)$.

$P(X = 0) = 0,97^{20} \approx 0,5438$; $P(X = 1) = 20 \times 0,03 \times 0,97^{19} \approx 0,3364$; $P(X = 20) = 0,03^{20} \approx 3,5 \times 10^{-31}$.

4. En déduire la probabilité qu'il y ait au moins 2 résistances hors tolérance.

$P(X \geq 2) = 1 - 0,5438 - 0,3364 \approx 0,1198$.

5. Calculer $P(X = 3)$ avec la formule des coefficients binomiaux.

$\binom{20}{3} \times 0,03^3 \times 0,97^{17} = 1140 \times 0,000027 \times 0,97^{17} \approx 0,0183$.

6. Calculer $E(X)$ et interpréter.

$E(X) = 20 \times 0,03 = 0,6$: en moyenne, 0,6 résistance hors tolérance par lot.

7. Un lot est refusé s'il contient au moins 2 résistances hors tolérance. Sur 500 lots, combien seront refusés en moyenne ?

$500 \times 0,1198 \approx 60$ lots.

8. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,99$.

$P(X \leq 2) \approx 0,9790$ et $P(X \leq 3) \approx 0,9973$: $k = 3$.

Exercice 4. QCM et $\{X = n - 1\}$

Un QCM comporte 10 questions, chacune avec 4 propositions dont une seule est correcte. Un candidat répond au hasard. X est le nombre de bonnes réponses.

1. Donner la loi de X et son espérance.

$$X \sim \mathcal{B}(10; 0,25); E(X) = 2,5.$$

2. Calculer $P(X = 10)$ et $P(X = 9)$.

$$P(X = 10) = 0,25^{10} \approx 9,5 \times 10^{-7}; P(X = 9) = 10 \times 0,25^9 \times 0,75 \approx 2,9 \times 10^{-5}.$$

3. Calculer la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse.

$$1 - 0,75^{10} \approx 0,9437.$$

4. Calculer $P(X = 5)$.

$$\binom{10}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^5 = 252 \times 0,25^5 \times 0,75^5 \approx 0,0584.$$

5. Chaque bonne réponse rapporte 2 points et chaque mauvaise en retire 0,5. On note N la note. Exprimer N en fonction de X et calculer $E(N)$.

$$N = 2X - 0,5(10 - X) = 2,5X - 5; E(N) = 2,5 \times 2,5 - 5 = 1,25.$$

6. Quel barème de pénalité m (points retirés par mauvaise réponse) rend l'espérance de la note nulle?

$$E(N) = 2 \times 2,5 - m \times 7,5 = 0 \iff m = \frac{2}{3}.$$

7. À l'aide de la calculatrice, calculer $P(X \geq 5)$.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0,9219 = 0,0781.$$

Représenter une loi binomiale

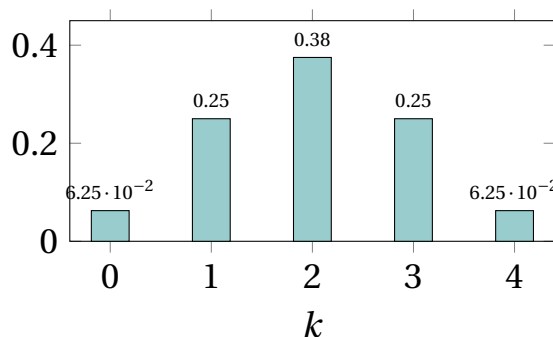
Exercice 5. Diagramme en bâtons

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,5)$.

1. Calculer $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 4.

$\frac{1}{16}; \frac{4}{16}; \frac{6}{16}; \frac{4}{16}; \frac{1}{16}$ soit 0,0625; 0,25; 0,375; 0,25; 0,0625.

2. Représenter la loi par un diagramme en bâtons. Que remarque-t-on?



Le diagramme est symétrique autour de $E(X) = 2$ (car $p = 0,5$); il reproduit la ligne 4 du triangle de Pascal divisée par 16.

3. Calculer $P(1 \leq X \leq 3)$.

$0,25 + 0,375 + 0,25 = 0,875$.

4. On considère maintenant $Y \sim \mathcal{B}(4; 0,2)$. Calculer les $P(Y = k)$ et représenter la loi. Le diagramme est-il encore symétrique?

$0,8^4 = 0,4096$; $4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096$; $6 \times 0,04 \times 0,64 = 0,1536$; $4 \times 0,008 \times 0,8 = 0,0256$; $0,0016$. Le diagramme n'est plus symétrique : il est « tassé » vers la gauche car $p < 0,5$.

5. Quelle est la valeur de k la plus probable pour Y ? Comparer avec $E(Y)$.

$k = 0$ et $k = 1$ sont également les plus probables (0,4096); $E(Y) = 0,8$ est compris entre les deux.