

Corrigé

Fonctions exponentielles

Calculer avec des puissances d'exposant réel

Exercice 1. Calculs avec les puissances réelles

Écrire sous la forme a^x puis donner une valeur approchée au centième.

1. $2^{1,5} \times 2^{2,3}$

$$2^{3,8} \approx 13,93$$

2. $\frac{5^{3,2}}{5^{1,7}}$

$$5^{1,5} \approx 11,18$$

3. $(1,2^4)^{0,5}$

$$1,2^2 = 1,44$$

4. $0,8^{2,5} \times 0,8^{-0,5}$

$$0,8^2 = 0,64$$

5. $(1,05^{1/12})^{12}$

$$1,05^1 = 1,05$$

6. $3^{0,5} \times 12^{0,5}$

$$36^{0,5} = 6$$

7. $\frac{4^{2,6} \times 4^{0,4}}{4^{1,5}}$

$$4^{1,5} = 8$$

8. $(0,5^{-2})^{1,5}$

$$0,5^{-3} = 8$$

9. $1,1^{0,2} \times 1,1^{0,3}$

$$1,1^{0,5} \approx 1,05$$

10. $\frac{1}{2,5^{-1,2}}$
 $2,5^{1,2} \approx 3,00$

11. Résoudre l'équation $x^5 = 32$ sur $]0 ; +\infty[$, puis $x^4 = 10$ (arrondir au centième).
 $x = 32^{1/5} = 2$; $x = 10^{1/4} \approx 1,78$.

12. Calculer la racine cubique de 125 et de 50 (valeur approchée au centième).
 $125^{1/3} = 5$; $50^{1/3} \approx 3,68$.

Étudier le sens de variation d'une fonction exponentielle

Exercice 2. Sens de variation

Donner le sens de variation de chaque fonction sur $[0 ; +\infty[$ en justifiant.

1. $f(x) = 1,7^x$

$1,7 > 1$: croissante.

2. $g(x) = 0,45^x$

$0 < 0,45 < 1$: décroissante.

3. $h(x) = 500 \times 0,9^x$

$500 > 0$ et $0,9 < 1$: décroissante.

4. $k(x) = -3 \times 1,1^x$

$1,1 > 1$ mais $-3 < 0$: décroissante.

5. $m(x) = 2 \times 1,03^x$

$2 > 0$ et $1,03 > 1$: croissante.

6. $p(x) = -0,5 \times 0,7^x$

$0,7 < 1$ et $-0,5 < 0$: croissante.

7. Dresser le tableau de variations de h sur $[0 ; 10]$ (valeurs arrondies à l'unité).

h décroît de $h(0) = 500$ à $h(10) = 500 \times 0,9^{10} \approx 174$.

8. Comparer sans calculatrice $1,7^{2,4}$ et $1,7^{2,5}$, puis $0,45^3$ et $0,45^{3,1}$.
 f croissante : $1,7^{2,4} < 1,7^{2,5}$. g décroissante : $0,45^3 > 0,45^{3,1}$.

Modéliser une évolution à taux constant par une fonction exponentielle

Exercice 3. Placement

On place 4 000 € au taux annuel de 3,5 % à intérêts composés. On note $C(x)$ la valeur du capital au bout de x années.

1. Exprimer $C(x)$ en fonction de x .

$$C(x) = 4000 \times 1,035^x.$$

2. Calculer la valeur du capital au bout de 4 ans, de 9 mois, de 5 ans et demi.

$$C(4) \approx 4590,09 \text{ €}; C(0,75) \approx 4104,55 \text{ €}; C(5,5) \approx 4833,17 \text{ €}.$$

3. À l'aide de la calculatrice (tableau de valeurs), déterminer au bout de combien d'années entières le capital dépasse 6 000 €.

$$C(11) \approx 5840 \text{ et } C(12) \approx 6044 : \text{au bout de 12 ans.}$$

4. Calculer le montant des intérêts perçus au total pendant les 4 premières années.

$$4590,09 - 4000 = 590,09 \text{ €}.$$

5. Un autre placement propose 3 500 € à 4,2 %. Lequel des deux capitaux sera le plus élevé au bout de 20 ans ?

$$4000 \times 1,035^{20} \approx 7959 \text{ € et } 3500 \times 1,042^{20} \approx 7969 \text{ €} : \text{le second, de peu, grâce à son taux plus élevé.}$$

Exercice 4. Dépréciation d'un matériel

Une entreprise achète une machine 25 000 €. Sa valeur diminue de 18 % par an. On note $V(x) = 25\,000 \times 0,82^x$ sa valeur au bout de x années.

1. Quel est le sens de variation de V ? Justifier.

$0 < 0,82 < 1$ et $25\,000 > 0$: V est décroissante.

2. Calculer la valeur de la machine au bout de 2 ans et demi.

$$V(2,5) = 25\,000 \times 0,82^{2,5} \approx 15\,222,10 \text{ €}.$$

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs (arrondir à l'euro), puis déterminer au bout de combien d'années la machine aura perdu plus de la moitié de sa valeur.

x	0	1	2	3	4
$V(x)$					

x	0	1	2	3	4
$V(x)$	25 000	20 500	16 810	13 784	11 303

La valeur passe sous 12 500 € au bout de 4 ans.

4. Quel est le taux d'évolution global de la valeur sur 4 ans?

$$0,82^4 - 1 \approx -0,548 : \text{baisse d'environ } 54,8 \text{ \%}.$$

5. L'entreprise revend la machine lorsque sa valeur passe sous 5 000 €. Au bout de combien d'années la revendra-t-elle?

$$V(8) \approx 5\,110 \text{ et } V(9) \approx 4\,190 : \text{au bout de 9 ans}.$$

Calculer un taux d'évolution moyen

Exercice 5. Taux d'évolution moyen

1. Le nombre d'abonnés à un service de streaming est passé de 12 000 à 20 000 en 3 ans. Calculer le taux d'évolution annuel moyen.

$$C = \frac{20000}{12000} \approx 1,6667; t_m = C^{1/3} - 1 \approx 0,1856 \text{ soit environ } 18,56 \% \text{ par an.}$$

2. Le prix d'un produit a baissé de 8 % puis augmenté de 15 %, puis augmenté de 4 %. Quel est le taux d'évolution moyen ?

$$C = 0,92 \times 1,15 \times 1,04 = 1,10032; t_m = 1,10032^{1/3} - 1 \approx 0,0324 \text{ soit environ } 3,24 \%.$$

3. Un loyer a augmenté de 20 % en 5 ans. Quel est le taux d'augmentation annuel moyen ?

$$t_m = 1,2^{1/5} - 1 \approx 0,0371 \text{ soit environ } 3,71 \% \text{ par an.}$$

4. Une banque propose un taux mensuel de 0,3 %. Quel est le taux annuel équivalent ?

$$1,003^{12} - 1 \approx 0,0366 \text{ soit environ } 3,66 \% \text{ par an.}$$

5. Le PIB d'un pays a augmenté en moyenne de 1,5 % par an pendant 10 ans. Quel a été le taux d'évolution global ?

$$1,015^{10} - 1 \approx 0,1605 \text{ soit environ } 16,05 \%.$$