

Fonction inverse

Calculer, résoudre et comparer avec la fonction inverse

Exercice 1. Calculs et courbe

1. Calculer l'image par la fonction inverse de : 4 ; -5 ; $0,2$; $-0,01$; $\frac{2}{3}$; 10^{-3} .
2. Existe-t-il un nombre dont l'image est 0? Justifier.
3. Tracer l'hyperbole dans un repère sur $[-4 ; -0,25] \cup [0,25 ; 4]$.
4. Résoudre graphiquement puis par le calcul : $\frac{1}{x} = 4$; $\frac{1}{x} = -0,5$.
5. Résoudre $\frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ puis $\frac{3}{x} = 12$.
6. Résoudre graphiquement $\frac{1}{x} \geq 2$ sur $]0 ; +\infty[$, puis $\frac{1}{x} < -1$ sur $] -\infty ; 0[$.

Exercice 2. Comparer sans calculatrice

En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, comparer :

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{1}{3,7}$ et $\frac{1}{3,8}$ | 4. $\frac{1}{-3}$ et $\frac{1}{2}$ |
| 2. $\frac{1}{-2,1}$ et $\frac{1}{-2,01}$ | 5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{1,4}$ |
| 3. $\frac{1}{10^{-5}}$ et $\frac{1}{10^{-4}}$ | 6. $\frac{1}{-0,5}$ et $\frac{1}{-0,49}$ |
7. Sachant que $2 \leq x \leq 5$, encadrer $\frac{1}{x}$ puis $\frac{10}{x}$.

Étudier les variations d'une fonction à l'aide de la dérivée

Exercice 3. Dérivées et variations

Pour chaque fonction définie sur $]0 ; +\infty[$, calculer la dérivée et en déduire le sens de variation.

1. $f(x) = \frac{3}{x}$

2. $g(x) = -\frac{2}{x} + 5$

3. $h(x) = 2x + \frac{8}{x}$

4. $k(x) = 4 - \frac{1}{x}$

5. $m(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x}$

6. $p(x) = 5x - 3 + \frac{20}{x}$

7. Dresser le tableau de variations de h sur $]0 ; +\infty[$.

8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Conjecturer des limites et identifier des asymptotes

Exercice 4. Limites et asymptotes

On considère $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$.

1. Compléter le tableau de valeurs.

x	0,001	0,1	1	10	100	10 000
$f(x)$						

2. Conjecturer le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0 puis lorsque x devient très grand.
3. En déduire les asymptotes à la courbe de f .
4. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
5. La courbe de f est-elle au-dessus ou en dessous de son asymptote horizontale? Justifier.
6. À partir de quelle valeur de x a-t-on $f(x) < 2,01$?
7. Mêmes questions (limites, asymptotes) pour $g(x) = -1 + \frac{2}{x}$.

Exercice 5. Coût moyen de production

Une entreprise fabrique des lampes. Les coûts fixes s'élèvent à 3 000 € par mois et chaque lampe coûte 12 € à produire. Pour x lampes ($x \geq 1$), le coût total est $C(x) = 12x + 3000$.

1. Exprimer le coût moyen par lampe $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.
2. Calculer $C_M(100)$ et $C_M(1\,000)$.
3. Étudier le sens de variation de C_M sur $[1 ; +\infty[$.
4. Vers quelle valeur le coût moyen se rapproche-t-il lorsque la production devient très grande? Interpréter.
5. Combien de lampes faut-il produire pour que le coût moyen soit inférieur à 14 €?
6. Les lampes sont vendues 20 € pièce. Exprimer le bénéfice $B(x)$ et déterminer le seuil de rentabilité.
7. Vérifier que le seuil de rentabilité correspond à la production pour laquelle $C_M(x) = 20$.
8. Les coûts fixes augmentent de 20 %. Combien de lampes faut-il désormais produire pour avoir un coût moyen inférieur à 14 €?

Corrigé

