

Corrigé

Fonction inverse

Calculer, résoudre et comparer avec la fonction inverse

Exercice 1. Calculs et courbe

1. Calculer l'image par la fonction inverse de : $4; -5; 0,2; -0,01; \frac{2}{3}; 10^{-3}.$
 $0,25; -0,2; 5; -100; \frac{3}{2}; 1\,000.$
2. Existe-t-il un nombre dont l'image est 0? Justifier.
Non : $\frac{1}{x} = 0$ n'a pas de solution car un quotient est nul seulement si son numérateur est nul, or $1 \neq 0$.
3. Tracer l'hyperbole dans un repère sur $[-4; -0,25] \cup [0,25; 4]$.
Voir cours : deux branches, dans les quadrants $x > 0, y > 0$ et $x < 0, y < 0$, symétriques par rapport à O.
4. Résoudre graphiquement puis par le calcul : $\frac{1}{x} = 4; \frac{1}{x} = -0,5.$
 $x = 0,25; x = -2.$
5. Résoudre $\frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ puis $\frac{3}{x} = 12.$
 $x = \frac{2}{5} = 0,4; \frac{1}{x} = 4$ donc $x = 0,25.$
6. Résoudre graphiquement $\frac{1}{x} \geq 2$ sur $]0; +\infty[$, puis $\frac{1}{x} < -1$ sur $] -\infty; 0[.$
 $\frac{1}{x} \geq 2 \iff 0 < x \leq 0,5; \frac{1}{x} < -1 \iff -1 < x < 0.$

Exercice 2. Comparer sans calculatrice

En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, comparer :

1. $\frac{1}{3,7}$ et $\frac{1}{3,8}$
 $0 < 3,7 < 3,8$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$: $\frac{1}{3,7} > \frac{1}{3,8}.$
2. $\frac{1}{-2,1}$ et $\frac{1}{-2,01}$
 $-2,1 < -2,01 < 0$ et décroissance sur $] -\infty; 0[$: $\frac{1}{-2,1} > \frac{1}{-2,01}.$

3. $\frac{1}{10^{-5}}$ et $\frac{1}{10^{-4}}$
 $0 < 10^{-5} < 10^{-4}$ donc $\frac{1}{10^{-5}} > \frac{1}{10^{-4}}$ ($100\,000 > 10\,000$).

4. $\frac{1}{-3}$ et $\frac{1}{2}$
 Un nombre négatif est inférieur à un positif : $\frac{1}{-3} < \frac{1}{2}$.

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{1,4}$
 $0 < 1,4 < \sqrt{2} \approx 1,414$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{1,4}$.

6. $\frac{1}{-0,5}$ et $\frac{1}{-0,49}$
 $-0,5 < -0,49 < 0$ et décroissance : $\frac{1}{-0,5} > \frac{1}{-0,49}$ (soit $-2 > -2,04\dots$).

7. Sachant que $2 \leq x \leq 5$, encadrer $\frac{1}{x}$ puis $\frac{10}{x}$.
 $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ puis $2 \leq \frac{10}{x} \leq 5$.

Étudier les variations d'une fonction à l'aide de la dérivée

Exercice 3. Dérivées et variations

Pour chaque fonction définie sur $]0 ; +\infty[$, calculer la dérivée et en déduire le sens de variation.

1. $f(x) = \frac{3}{x}$
 $f'(x) = -\frac{3}{x^2} < 0$: décroissante.

2. $g(x) = -\frac{2}{x} + 5$
 $g'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$: croissante.

3. $h(x) = 2x + \frac{8}{x}$
 $h'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$. Sur $]0 ; +\infty[$, du signe de $x - 2$: h décroissante sur $]0 ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$, minimum $h(2) = 8$.

4. $k(x) = 4 - \frac{1}{x}$
 $k'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$: croissante.

5. $m(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x}$
 $m'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-4}{4x^2}$: du signe de $x-2$ sur $]0 ; +\infty[$. m décroissante sur $]0 ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$, minimum $m(2) = 1$.

6. $p(x) = 5x - 3 + \frac{20}{x}$
 $p'(x) = 5 - \frac{20}{x^2} = \frac{5(x^2-4)}{x^2}$: décroissante sur $]0 ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$, minimum $p(2) = 17$.

7. Dresser le tableau de variations de h sur $]0 ; +\infty[$.

x	0	2	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$		8	

8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
 $f(1) = 3$, $f'(1) = -3$: $y = -3(x-1) + 3 = -3x + 6$.

Conjecturer des limites et identifier des asymptotes

Exercice 4. Limites et asymptotes

On considère $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$.

1. Compléter le tableau de valeurs.

x	0,001	0,1	1	10	100	10 000
$f(x)$						

x	0,001	0,1	1	10	100	10 000
$f(x)$	3 002	32	5	2,3	2,03	2,0003

2. Conjecturer le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0 puis lorsque x devient très grand.

Quand x se rapproche de 0, $f(x)$ devient très grand ($+\infty$). Quand x devient très grand, $f(x)$ se rapproche de 2.

3. En déduire les asymptotes à la courbe de f .

Asymptote verticale : l'axe des ordonnées ($x = 0$). Asymptote horizontale : la droite $y = 2$.

4. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} < 0 : f \text{ est décroissante sur }]0 ; +\infty[.$$

5. La courbe de f est-elle au-dessus ou en dessous de son asymptote horizontale? Justifier.

$$f(x) - 2 = \frac{3}{x} > 0 : \text{la courbe est au-dessus de la droite } y = 2.$$

6. À partir de quelle valeur de x a-t-on $f(x) < 2,01$?

$$\frac{3}{x} < 0,01 \iff x > 300.$$

7. Mêmes questions (limites, asymptotes) pour $g(x) = -1 + \frac{2}{x}$.

$g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0$ et $g(x) \rightarrow -1$ quand x devient très grand : asymptotes $x = 0$ et $y = -1$.

Modéliser une situation économique : coût moyen

Exercice 5. Coût moyen de production

Une entreprise fabrique des lampes. Les coûts fixes s'élèvent à 3 000 € par mois et chaque lampe coûte 12 € à produire. Pour x lampes ($x \geq 1$), le coût total est $C(x) = 12x + 3000$.

1. Exprimer le coût moyen par lampe $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

$$C_M(x) = 12 + \frac{3000}{x}.$$

2. Calculer $C_M(100)$ et $C_M(1000)$.

$$C_M(100) = 42 \text{ €}; C_M(1000) = 15 \text{ €}.$$

3. Étudier le sens de variation de C_M sur $[1 ; +\infty[$.

$$C'_M(x) = -\frac{3000}{x^2} < 0 : C_M \text{ est décroissante.}$$

4. Vers quelle valeur le coût moyen se rapproche-t-il lorsque la production devient très grande? Interpréter.

Vers 12 € : pour une très grande production, les coûts fixes deviennent négligeables par lampe ; le coût moyen tend vers le coût variable unitaire.

5. Combien de lampes faut-il produire pour que le coût moyen soit inférieur à 14 €?

$12 + \frac{3000}{x} < 14 \iff \frac{3000}{x} < 2 \iff x > 1500$. Il faut produire plus de 1 500 lampes.

6. Les lampes sont vendues 20 € pièce. Exprimer le bénéfice $B(x)$ et déterminer le seuil de rentabilité.

$B(x) = 20x - (12x + 3000) = 8x - 3000 > 0 \iff x > 375$: à partir de 376 lampes.

7. Vérifier que le seuil de rentabilité correspond à la production pour laquelle $C_M(x) = 20$.

$12 + \frac{3000}{x} = 20 \iff x = 375$: le coût moyen est égal au prix de vente.

8. Les coûts fixes augmentent de 20 %. Combien de lampes faut-il désormais produire pour avoir un coût moyen inférieur à 14 €?

Coûts fixes : 3 600 € ; $\frac{3600}{x} < 2 \iff x > 1800$.