

Corrigé

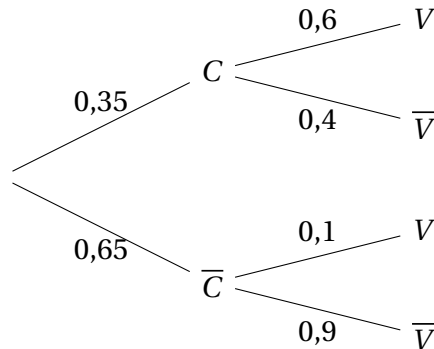
Probabilités conditionnelles

Construire et exploiter un arbre pondéré

Exercice 1. Construire et lire un arbre

Dans une entreprise, 35 % des salariés travaillent au service commercial (C), les autres au service production. Parmi les commerciaux, 60 % utilisent une voiture de fonction (V) ; parmi les salariés de la production, 10 % en utilisent une. On choisit un salarié au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré associé à la situation.



2. Que représente le nombre 0,6 ? Le noter avec une probabilité conditionnelle.
C'est la probabilité qu'un salarié ait une voiture de fonction sachant qu'il est commercial : $P_C(V) = 0,6$.
3. Calculer la probabilité que le salarié soit un commercial ayant une voiture de fonction.
 $P(C \cap V) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$.
4. Calculer $P(\bar{C} \cap V)$.
 $P(\bar{C} \cap V) = 0,65 \times 0,1 = 0,065$.
5. En déduire la probabilité qu'un salarié ait une voiture de fonction.
 $P(V) = 0,21 + 0,065 = 0,275$ (formule des probabilités totales).
6. Un salarié a une voiture de fonction. Quelle est la probabilité qu'il soit commercial ?
$$P_V(C) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0,21}{0,275} \approx 0,764$$

7. Calculer la probabilité qu'un salarié n'ait pas de voiture de fonction.

$$P(\overline{V}) = 1 - 0,275 = 0,725.$$

8. Un salarié n'a pas de voiture de fonction. Quelle est la probabilité qu'il travaille à la production ?

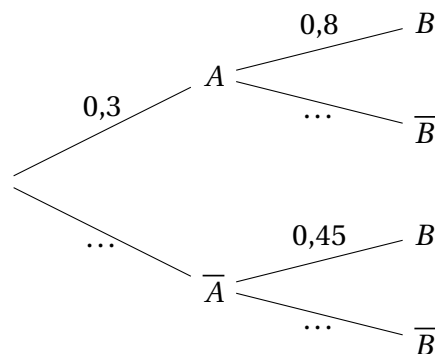
$$P(\overline{C} \cap \overline{V}) = 0,65 \times 0,9 = 0,585; P_{\overline{V}}(\overline{C}) = \frac{0,585}{0,725} \approx 0,807.$$

9. L'entreprise compte 400 salariés. Combien de voitures de fonction possède-t-elle ?

$$0,275 \times 400 = 110 \text{ voitures.}$$

Exercice 2. Compléter un arbre

On donne l'arbre pondéré ci-dessous.



1. Compléter l'arbre.

$$P(\overline{A}) = 0,7; P_A(\overline{B}) = 0,2; P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,55.$$

2. Calculer $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ puis $P(B)$.

$$P(A \cap B) = 0,3 \times 0,8 = 0,24; P(\overline{A} \cap B) = 0,7 \times 0,45 = 0,315; P(B) = 0,24 + 0,315 = 0,555.$$

3. Calculer $P_B(A)$ arrondi au millième.

$$P_B(A) = \frac{0,24}{0,555} \approx 0,432.$$

4. Calculer $P(\overline{B})$ de deux façons.

$$1 - 0,555 = 0,445 \text{ et } 0,3 \times 0,2 + 0,7 \times 0,55 = 0,06 + 0,385 = 0,445.$$

5. Calculer $P_{\overline{B}}(\overline{A})$ arrondi au millièmes.

$$\frac{0,385}{0,445} \approx 0,865.$$

6. Les événements A et B sont-ils indépendants? Justifier.

$$P_A(B) = 0,8 \neq P(B) = 0,555 : \text{non.}$$

Appliquer la formule des probabilités totales

Exercice 3. Partition en trois événements

Un magasin de vêtements a trois fournisseurs : F_1 fournit 50 % des articles, F_2 30 % et F_3 20 %. Les taux d'articles défectueux sont respectivement 2 %, 4 % et 5 %. On choisit un article au hasard et on note D l'événement « l'article est défectueux ».

1. Construire l'arbre pondéré.

Premier niveau : F_1 (0,5), F_2 (0,3), F_3 (0,2). Second niveau : D avec 0,02 ; 0,04 ; 0,05 et $\overline{D}$ avec 0,98 ; 0,96 ; 0,95.

2. Calculer $P(D)$.

$$P(D) = 0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = 0,01 + 0,012 + 0,01 = 0,032.$$

3. Un article est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur F_2 ?

$$P_D(F_2) = \frac{0,012}{0,032} = 0,375.$$

4. Calculer la probabilité qu'un article non défectueux provienne de F_1 .

$$P(\overline{D}) = 1 - 0,032 = 0,968; P(F_1 \cap \overline{D}) = 0,5 \times 0,98 = 0,49; P_{\overline{D}}(F_1) = \frac{0,49}{0,968} \approx 0,506.$$

5. Calculer $P_D(F_1)$ et $P_D(F_3)$. Vérifier que $P_D(F_1) + P_D(F_2) + P_D(F_3) = 1$.

$$P_D(F_1) = \frac{0,01}{0,032} = 0,3125; P_D(F_3) = \frac{0,01}{0,032} = 0,3125; 0,3125 + 0,375 + 0,3125 = 1.$$

6. Le magasin reçoit 5 000 articles. Combien d'articles défectueux peut-il prévoir?

$$0,032 \times 5\,000 = 160 \text{ articles.}$$

7. Le magasin veut que moins de 3 % des articles soient défectueux. Il remplace F_3 par un fournisseur ayant un taux de défaut t . Quelle valeur maximale de t convient ?

$$0,01 + 0,012 + 0,2t < 0,03 \iff 0,2t < 0,008 \iff t < 0,04 : \text{taux inférieur à 4 \%}.$$

Passer d'un tableau croisé à un arbre pondéré

Exercice 4. Du tableau à l'arbre

Une étude sur 2 000 clients d'une banque donne :

	Application mobile (M)	Pas d'application	Total
Moins de 40 ans (J)	720	180	900
40 ans et plus	440	660	1 100
Total	1 160	840	2 000

1. Calculer $P(J)$, $P_J(M)$ et $P_{\bar{J}}(M)$.

$$P(J) = \frac{900}{2000} = 0,45; P_J(M) = \frac{720}{900} = 0,8; P_{\bar{J}}(M) = \frac{440}{1100} = 0,4.$$

2. Construire l'arbre pondéré de premier niveau J et $\bar{J}$.

$$J (0,45) \text{ puis } M (0,8) / \bar{M} (0,2); \bar{J} (0,55) \text{ puis } M (0,4) / \bar{M} (0,6).$$

3. Retrouver $P(M)$ par la formule des probabilités totales et vérifier avec le tableau.

$$P(M) = 0,45 \times 0,8 + 0,55 \times 0,4 = 0,36 + 0,22 = 0,58 \text{ et } \frac{1160}{2000} = 0,58.$$

4. Un client utilise l'application. Quelle est la probabilité qu'il ait moins de 40 ans ?

$$P_M(J) = \frac{720}{1160} \approx 0,621 \text{ (ou } \frac{0,36}{0,58}).$$

5. Calculer $P(J \cup M)$.

$$P(J \cup M) = 0,45 + 0,58 - 0,36 = 0,67.$$

6. Construire l'autre arbre, de premier niveau M et $\bar{M}$.

$$M (0,58) \text{ puis } J (\frac{720}{1160} \approx 0,621) / \bar{J} (\approx 0,379); \bar{M} (0,42) \text{ puis } J (\frac{180}{840} \approx 0,214) / \bar{J} (\approx 0,786).$$

7. La banque affirme : « L'âge n'a pas d'influence sur l'usage de l'application. »
Qu'en pensez-vous?

$P_J(M) = 0,8$ et $P_{\bar{J}}(M) = 0,4$: les moins de 40 ans l'utilisent deux fois plus.
L'affirmation est fausse.