

# Suites géométriques

## Modélisation - Corrigé

### Exercice 1.

---

1. Oui :  $\frac{6}{3} = 2$  et  $\frac{12}{6} = 2$ . La raison est  $q = 2$ .
2. Oui :  $\frac{10}{5} = 2$  et  $\frac{20}{10} = 2$ . La raison est  $q = 2$ .
3. Oui :  $\frac{6}{2} = 3$  et  $\frac{18}{6} = 3$ . La raison est  $q = 3$ .
4. Oui :  $\frac{27}{81} = \frac{1}{3}$  et  $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ . La raison est  $q = \frac{1}{3}$ .
5. Non :  $\frac{8}{4} = 2$  tandis que  $\frac{15}{8} \neq 2$ .
6. Oui :  $\frac{90}{100} = 0,9$  et  $\frac{81}{90} = 0,9$ . La raison est  $q = 0,9$ .
7. Oui :  $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$  et  $\frac{2}{1} = 2$ . La raison est  $q = 2$ .
8. Oui :  $\frac{7}{7} = 1$  et  $\frac{7}{7} = 1$ . La raison est  $q = 1$ .

### Exercice 2.

---

1.  $18 \times 3 = 54$ , donc  $q = 3$ . Le premier terme est  $18 \div 3 = 6$ . Le terme suivant est  $54 \times 3 = 162$ .
2.  $12 \times q^2 = 108$ , donc  $q^2 = 9$  et  $q = 3$ . La valeur manquante est  $12 \times 3 = 36$ . Le terme suivant est  $108 \times 3 = 324$ .
3.  $5 \times 4 = 20$ , donc  $q = 4$ . La valeur manquante est  $20 \times 4 = 80$ . Le terme suivant est  $80 \times 4 = 320$ .
4.  $32 \times q = 8$ , donc  $q = \frac{1}{4}$ . Le premier terme est  $32 \div \frac{1}{4} = 128$ . Le terme suivant est  $8 \times \frac{1}{4} = 2$ .
5.  $1200 \times q^2 = 300$ , donc  $q^2 = \frac{1}{4}$  et  $q = \frac{1}{2}$ . La valeur manquante est  $1200 \times \frac{1}{2} = 600$ . Le terme suivant est  $300 \times \frac{1}{2} = 150$ .
6.  $81 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -27$ , donc  $q = -\frac{1}{3}$ . La valeur manquante est  $(-27) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 9$ . Le terme suivant est  $9 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -3$ .

### Exercice 3.

---

1.  $A(0) = 2^0 = 1$ ,  $A(1) = 2^1 = 2$  et  $A(2) = 2^2 = 4$ .

2. On a  $\frac{2}{1} = 2$  et  $\frac{4}{2} = 2$ . Les termes 1, 2 et 4 forment donc le début d'une suite géométrique.

3. La raison est  $q = 2$ .

4. Pour  $B(x) = 3 \times 2^x$  :

$$B(0) = 3, \quad B(1) = 6, \quad B(2) = 12.$$

On a  $\frac{6}{3} = 2$  et  $\frac{12}{6} = 2$ . La suite est géométrique de raison 2.

Pour  $C(x) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$  :

$$C(0) = 5, \quad C(1) = \frac{5}{2}, \quad C(2) = \frac{5}{4}.$$

On a  $\frac{5}{5} = 1$  et  $\frac{5/2}{5/4} = \frac{1}{2}$ . La suite est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

5. Si  $u_n = a \times q^n$ , alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a \times q^{n+1}}{a \times q^n} = q.$$

Le quotient de deux termes consécutifs est constant : la suite est donc géométrique de raison  $q$ .

#### Exercice 4.

---

1. Chaque année, le salaire est multiplié par  $1 + \frac{2}{100} = 1,02$ . La suite  $(u_n)$  est donc géométrique.

2.  $u_0 = 1\,850$  et  $q = 1,02$ .

3. L'année 2029 correspond à  $n = 3$  :

$$u_3 = 1\,850 \times 1,02^3 \simeq 1\,963,23.$$

En janvier 2029, le salaire est donc d'environ 1 963,23 €.

L'année 2035 correspond à  $n = 9$  :

$$u_9 = 1\,850 \times 1,02^9 \simeq 2\,210,92.$$

En janvier 2035, le salaire est donc d'environ 2 210,92 €.

4. Pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 1\,850 \times 1,02^n.$$

### Exercice 5.

---

1. Une baisse de 8 % correspond à une multiplication par :

$$1 - \frac{8}{100} = 0,92.$$

La suite  $(p_n)$  est donc géométrique.

2.  $p_0 = 240$  et  $q = 0,92$ .

- 3.

$$p_1 = 240 \times 0,92 = 220,80.$$

$$p_2 = 240 \times 0,92^2 = 203,136 \simeq 203,14.$$

$$p_6 = 240 \times 0,92^6 \simeq 145,53.$$

4. Pour tout entier naturel  $n$  :

$$p_n = 240 \times 0,92^n.$$

### Exercice 6.

---

1. Une hausse de 6 % correspond à un coefficient multiplicateur :

$$q = 1 + \frac{6}{100} = 1,06.$$

- 2.

$$q_n = 12\,500 \times 1,06^n.$$

3. L'année 2030 correspond à  $n = 4$  :

$$q_4 = 12\,500 \times 1,06^4 \simeq 15\,781.$$

L'année 2036 correspond à  $n = 10$  :

$$q_{10} = 12\,500 \times 1,06^{10} \simeq 22\,386.$$

4. On cherche le plus petit entier  $n$  tel que :

$$12\,500 \times 1,06^n > 20\,000.$$

À la calculatrice, on obtient  $n > 8,07$ . Le plus petit entier convenable est donc  $n = 9$ .

L'année correspondante est  $2026 + 9 = 2035$ . La production dépasse 20 000 objets à partir de 2035.

### Exercice 7.

---

1. Une diminution de 15 % correspond à une multiplication par :

$$q = 1 - \frac{15}{100} = 0,85.$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique.

2.  $v_0 = 28\,000$  et  $q = 0,85$ .

- 3.

$$v_n = 28\,000 \times 0,85^n.$$

- 4.

$$v_5 = 28\,000 \times 0,85^5 \simeq 12\,424.$$

Après 5 ans, le véhicule vaut environ 12 424 €.

$$v_{10} = 28\,000 \times 0,85^{10} \simeq 5\,512.$$

Après 10 ans, il vaut environ 5 512 €.

5. On cherche le plus petit entier  $n$  tel que :

$$28\,000 \times 0,85^n < 10\,000.$$

À la calculatrice, on obtient  $n > 6,34$ . Le plus petit entier convenable est  $n = 7$ .

La valeur devient inférieure à 10 000 € après 7 ans.

## Somme des termes – Corrigé

### Exercice 8.

On utilise la formule :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1.$$

1.  $1 + 2 + 4 + \dots + 512 = 2^{10} - 1 = 1\,023.$  **10.**

2.  $3 + 6 + 12 + \dots + 384 = 3 \times \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 765.$   $7 + 14 + 28 + \dots + 896 = 7 \times \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 1\,785.$

3.

**11.**  
 $1\,000 + 900 + 810 + \dots + 478,2969 = 1\,000 \times \frac{1 - 0,9^8}{1 - 0,9} \simeq 5\,695,33.$   
 $81 + 27 + 9 + \dots + \frac{1}{3} = 81 \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^6}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{364}{3}.$

4.

$5 + 10 + 20 + \dots + 640 = 5 \times \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 1\,275.$  **12.**

5.

$4 + 8 + 16 + \dots + 1\,024 = 4 \times \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 2\,044.$   
 $\sum_{k=0}^8 3 \times 2^k = 3 \times \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 1\,533.$  **13.**

6.

$\sum_{k=0}^6 5 \times 3^k = 5 \times \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 5\,465.$   $\sum_{k=0}^{10} 2 \times 1,5^k = 2 \times \frac{1 - 1,5^{11}}{1 - 1,5} \simeq 342,00.$

7.

**14.**  
 $100 + 50 + 25 + \dots + \frac{25}{4} = 100 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} = 193,75.$   $\sum_{k=0}^7 640 \times 0,5^k = 640 \times \frac{1 - 0,5^8}{1 - 0,5} = 1\,275.$

8.

**15.**  
 $2 + 6 + 18 + \dots + 486 = 2 \times \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728.$   $\sum_{k=1}^8 3^k = 3 \times \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 9\,840.$

9.

**16.**  
 $1\,024 + 512 + 256 + \dots + 8 = 1\,024 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^8}{1 - \frac{1}{2}} = 2\,040.$   $2\,000 + 1\,800 + 1\,620 + \dots + 956,5938 = 2\,000 \times \frac{1 - \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 20\,000.$

### Exercice 9.

1.

$$u_{10} = 7 \times 3^{10} = 413\,343.$$

2.

$$S = \sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10} 7 \times 3^k.$$

3.

$$S = 7 \times \frac{3^{11} - 1}{3 - 1}.$$

Or  $3^{11} = 177\,147$ , donc :

$$S = 7 \times \frac{177\,147 - 1}{2} = 620\,011.$$

4.

$$T = \sum_{k=5}^{20} u_k = u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}.$$

Or :

$$u_5 = 7 \times 3^5 = 1\,701.$$

Il y a  $20 - 5 + 1 = 16$  termes, donc :

$$T = 1\,701 \times \frac{3^{16} - 1}{3 - 1}.$$

Ainsi :

$$T = 1\,701 \times \frac{3^{16} - 1}{2} = 36\,611\,235\,360.$$

### Exercice 10.

---

1.

$$v_{12} = 150 \times 0,8^{11} \simeq 12,88.$$

2.

$$S = \sum_{k=1}^{12} v_k = \sum_{k=1}^{12} 150 \times 0,8^{k-1}.$$

3. Il y a 12 termes :

$$S = 150 \times \frac{1 - 0,8^{12}}{1 - 0,8}.$$

Ainsi :

$$S \simeq 698,46.$$

Le total est donc d'environ 698,46.

### Exercice 11.

---

1. Une hausse de 5 % correspond à :

$$q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05.$$

2. En 2030,  $n = 4$  :

$$u_4 = 500 \times 1,05^4 \simeq 607,75.$$

En 2035,  $n = 9$  :

$$u_9 = 500 \times 1,05^9 \simeq 775,66.$$

3.

$$\sum_{k=0}^9 u_k = \sum_{k=0}^9 500 \times 1,05^k.$$

4.

$$\sum_{k=0}^9 u_k = 500 \times \frac{1 - 1,05^{10}}{1 - 1,05}.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^9 u_k \simeq 6\,288,95.$$

Le total des versements est d'environ 6 288,95 €.

### Exercice 12.

---

1. Pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$p_n = 200 \times 1,04^{n-1}.$$

2.

$$p_{10} = 200 \times 1,04^9 \simeq 284,66.$$

3.

$$\sum_{k=1}^{10} p_k = 200 \times \frac{1 - 1,04^{10}}{1 - 1,04} \simeq 2\,401,22.$$

4.

$$\sum_{k=5}^{15} p_k = \sum_{k=5}^{15} 200 \times 1,04^{k-1}.$$

Il y a  $15 - 5 + 1 = 11$  termes et  $p_5 = 200 \times 1,04^4$ . Donc :

$$\sum_{k=5}^{15} p_k = 200 \times 1,04^4 \times \frac{1 - 1,04^{11}}{1 - 1,04}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=5}^{15} p_k \simeq 3\,155,42.$$

### Exercice 13.

---

1. Une augmentation de 12 % correspond à un coefficient multiplicateur :

$$q = 1 + \frac{12}{100} = 1,12.$$

La suite  $(b_n)$  est donc géométrique.

- 2.

$$b_n = 2500 \times 1,12^n.$$

- 3.

$$b_{12} = 2500 \times 1,12^{12} \simeq 9740.$$

Après 12 heures, on compte environ 9740 bactéries.

4. On cherche le plus petit entier  $n$  tel que :

$$2500 \times 1,12^n > 10000.$$

Cela équivaut à :

$$1,12^n > 4.$$

À la calculatrice, on trouve  $n > 12,23$ . Le premier entier convenable est  $n = 13$ .

Le nombre de bactéries dépasse donc 10 000 après 13 heures.

### Exercice 14.

---

1. Une augmentation de 8 % correspond à un coefficient multiplicateur de 1,08 :

$$b_n = 3\,000 \times 1,08^n.$$

2. La 12<sup>e</sup> semaine correspond à  $n = 11$  :

$$b_{11} = 3\,000 \times 1,08^{11} \simeq 6\,994,92.$$

Le budget de la 12<sup>e</sup> semaine est d'environ 6 994,92 €.

3. Le budget total sur 12 semaines est :

$$S = \sum_{k=0}^{11} 3\,000 \times 1,08^k.$$

Donc :

$$S = 3\,000 \times \frac{1 - 1,08^{12}}{1 - 1,08} \simeq 56\,931,38.$$

Le budget total engagé est d'environ 56 931,38 €.

4.  $56\,931,38 > 55\,000$  : la campagne de 12 semaines **ne peut pas** être réalisée sans dépasser le budget (il manque environ 1 931,38 €).

### Exercice 15.

---

1. Une hausse de 7 % correspond à une raison de 1,07 :

$$v_n = 350 \times 1,07^n.$$

2. Décembre correspond à  $n = 11$  :

$$v_{11} = 350 \times 1,07^{11} \simeq 737.$$

La boutique prévoit donc de vendre environ 737 articles en décembre.

3. Le total annuel vaut :

$$\sum_{k=0}^{11} v_k = 350 \times \frac{1 - 1,07^{12}}{1 - 1,07}.$$

À la calculatrice, on obtient environ 6 261 articles.

### Exercice 16.

---

1. Une perte de 18 % correspond à une multiplication par :

$$q = 1 - \frac{18}{100} = 0,82.$$

Ainsi,  $m_0 = 750$  et la raison est  $q = 0,82$ .

2.

$$m_n = 750 \times 0,82^n.$$

3.

$$m_7 = 750 \times 0,82^7 \simeq 187,0.$$

Après 7 jours, la masse est d'environ 187,0 g.

$$m_{20} = 750 \times 0,82^{20} \simeq 14,2.$$

Après 20 jours, la masse est d'environ 14,2 g.

4. On cherche le plus petit entier  $n$  tel que :

$$750 \times 0,82^n < 100.$$

À la calculatrice, on trouve  $n > 10,15$ . Le premier entier convenable est donc  $n = 11$ .

La masse devient inférieure à 100 g après 11 jours.