

Variables aléatoires

Déterminer une loi de probabilité et calculer une espérance

Exercice 1. Espérance et jeu équitable

Une association organise une tombola : 500 billets sont vendus 3 € chacun. On gagne un lot de 200 € (1 billet), 4 lots de 50 € et 20 lots de 10 €. On note X le gain algébrique d'un joueur qui achète un billet.

1. Donner la loi de probabilité de X .
2. Calculer $E(X)$ et interpréter.
3. Quel devrait être le prix du billet pour que le jeu soit équitable ($E(X) = 0$) ?
4. Calculer $P(X > 0)$ et interpréter.
5. Quel bénéfice l'association peut-elle espérer si tous les billets sont vendus ? Retrouver ce résultat à l'aide de $E(X)$.
6. L'association veut un bénéfice de 1 200 € en gardant le même prix. Quelle valeur totale de lots peut-elle offrir ?

Reconnaître une loi binomiale et représenter la situation par un arbre

Exercice 2. Reconnaître une loi binomiale

Dans chaque cas, dire si X suit une loi binomiale ; si oui, donner ses paramètres.

1. On lance 10 fois un dé équilibré et X compte le nombre de 6.
2. Une urne contient 3 boules rouges et 7 noires. On tire successivement 4 boules **avec remise** ; X compte les boules rouges.
3. Même urne, mais les tirages se font **sans remise**.
4. 8 % des pièces d'une production sont défectueuses. On prélève 50 pièces dans une très grande production (assimilé à un tirage avec remise) ; X compte les pièces défectueuses.
5. On interroge au hasard 20 personnes dans la rue et X compte leur âge total.
6. Un QCM de 12 questions a 4 réponses possibles chacune ; un élève répond au hasard et X compte les bonnes réponses.

Exercice 3. Arbre et loi binomiale

Un client d'un site de vente en ligne laisse un avis avec la probabilité 0,4. On considère 3 clients indépendants et X le nombre d'avis laissés.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
3. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 1)$.
4. En déduire $P(X = 2)$, puis $P(X \geq 1)$.
5. Calculer $E(X)$.
6. Représenter la loi de X par un diagramme en bâtons.
7. Calculer $P(X \leq 2)$.

Exercice 4. Triangle de Pascal

1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 8$.
2. En déduire $\binom{7}{3}$, $\binom{8}{2}$ et $\binom{8}{4}$.
3. Combien de chemins d'un arbre à 8 épreuves comportent exactement 6 succès?
4. Vérifier la relation $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$.
5. Expliquer pourquoi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ en termes de chemins.
6. Calculer la somme des nombres de la ligne 8. Interpréter.

Calculer des probabilités avec une loi binomiale

Exercice 5. Contrôle qualité

Une machine produit des bouteilles dont 5 % présentent un défaut. On prélève au hasard 8 bouteilles (tirage assimilé à un tirage avec remise). X désigne le nombre de bouteilles défectueuses.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer la probabilité qu'aucune bouteille ne soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité qu'au moins une bouteille soit défectueuse.
4. Calculer $P(X = 2)$ à l'aide d'un coefficient binomial.
5. Calculer l'espérance de X et l'interpréter.
6. Calculer $P(X = 1)$ puis $P(X \leq 1)$.
7. Calculer $P(X \geq 2)$.
8. Si l'on trouve au moins 2 bouteilles défectueuses, on arrête la machine pour la régler. Cet arrêt est-il fréquent si la machine fonctionne normalement?
9. On prélève désormais 30 bouteilles. À l'aide de la calculatrice, calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 3)$.

Corrigé

