

Corrigé

Variables aléatoires

Déterminer une loi de probabilité et calculer une espérance

Exercice 1. Espérance et jeu équitable

Une association organise une tombola : 500 billets sont vendus 3 € chacun. On gagne un lot de 200 € (1 billet), 4 lots de 50 € et 20 lots de 10 €. On note X le gain algébrique d'un joueur qui achète un billet.

1. Donner la loi de probabilité de X .

x_i	-3	7	47	197
$P(X = x_i)$	$\frac{475}{500} = 0,95$	$\frac{20}{500} = 0,04$	$\frac{4}{500} = 0,008$	$\frac{1}{500} = 0,002$

2. Calculer $E(X)$ et interpréter.

$$E(X) = -3 \times 0,95 + 7 \times 0,04 + 47 \times 0,008 + 197 \times 0,002 = -2,85 + 0,28 + 0,376 + 0,394 = -1,8.$$

En moyenne un joueur perd 1,80 € par billet (l'association gagne en moyenne 1,80 € par billet).

3. Quel devrait être le prix du billet pour que le jeu soit équitable ($E(X) = 0$) ?

La somme des lots vaut $200 + 200 + 200 = 600$ € pour 500 billets : le prix équitable est $\frac{600}{500} = 1,20$ €.

4. Calculer $P(X > 0)$ et interpréter.

$$P(X > 0) = 0,04 + 0,008 + 0,002 = 0,05 : \text{un billet sur 20 est gagnant.}$$

5. Quel bénéfice l'association peut-elle espérer si tous les billets sont vendus ?

Retrouver ce résultat à l'aide de $E(X)$.

$$500 \times 3 - 600 = 900 \text{ € ; et } 500 \times 1,80 = 900 \text{ €.}$$

6. L'association veut un bénéfice de 1 200 € en gardant le même prix. Quelle valeur totale de lots peut-elle offrir ?

$$1\,500 - 1\,200 = 300 \text{ € de lots.}$$

Reconnaître une loi binomiale et représenter la situation par un arbre

Exercice 2. Reconnaître une loi binomiale

Dans chaque cas, dire si X suit une loi binomiale; si oui, donner ses paramètres.

1. On lance 10 fois un dé équilibré et X compte le nombre de 6.

Oui : 10 épreuves identiques et indépendantes, succès « obtenir 6 » de probabilité $\frac{1}{6}$: $\mathcal{B}(10 ; \frac{1}{6})$.

2. Une urne contient 3 boules rouges et 7 noires. On tire successivement 4 boules **avec remise**; X compte les boules rouges.

Oui : $\mathcal{B}(4 ; 0,3)$.

3. Même urne, mais les tirages se font **sans remise**.

Non : les tirages ne sont pas indépendants (la composition de l'urne change).

4. 8 % des pièces d'une production sont défectueuses. On prélève 50 pièces dans une très grande production (assimilé à un tirage avec remise); X compte les pièces défectueuses.

Oui : $\mathcal{B}(50 ; 0,08)$.

5. On interroge au hasard 20 personnes dans la rue et X compte leur âge total.

Non : X ne compte pas un nombre de succès.

6. Un QCM de 12 questions a 4 réponses possibles chacune; un élève répond au hasard et X compte les bonnes réponses.

Oui : $\mathcal{B}(12 ; 0,25)$.

Exercice 3. Arbre et loi binomiale

Un client d'un site de vente en ligne laisse un avis avec la probabilité 0,4. On considère 3 clients indépendants et X le nombre d'avis laissés.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Arbre à 3 niveaux, chaque nœud se divisant en A (0,4) et $\bar{A}$ (0,6) : 8 chemins.

2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

3 épreuves de Bernoulli identiques ($p = 0,4$) et indépendantes ; X compte les succès : $X \sim \mathcal{B}(3 ; 0,4)$.

3. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 1)$.

$$P(X = 0) = 0,6^3 = 0,216; P(X = 3) = 0,4^3 = 0,064; P(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,6^2 = 0,432.$$

4. En déduire $P(X = 2)$, puis $P(X \geq 1)$.

$$P(X = 2) = 1 - 0,216 - 0,064 - 0,432 = 0,288; P(X \geq 1) = 1 - 0,216 = 0,784.$$

5. Calculer $E(X)$.

$$E(X) = 3 \times 0,4 = 1,2.$$

6. Représenter la loi de X par un diagramme en bâtons.

Bâtons de hauteurs 0,216 ; 0,432 ; 0,288 ; 0,064 pour $k = 0 ; 1 ; 2 ; 3$.

7. Calculer $P(X \leq 2)$.

$$1 - P(X = 3) = 1 - 0,064 = 0,936.$$

Exercice 4. Triangle de Pascal

1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 8$.

Ligne 7 : 1 ; 7 ; 21 ; 35 ; 35 ; 21 ; 7 ; 1. Ligne 8 : 1 ; 8 ; 28 ; 56 ; 70 ; 56 ; 28 ; 8 ; 1.

2. En déduire $\binom{7}{3}$, $\binom{8}{2}$ et $\binom{8}{4}$.

$$\binom{7}{3} = 35; \binom{8}{2} = 28; \binom{8}{4} = 70.$$

3. Combien de chemins d'un arbre à 8 épreuves comportent exactement 6 succès ?

$$\binom{8}{6} = 28 \text{ chemins.}$$

4. Vérifier la relation $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$.

$$21 + 35 = 56 = \binom{8}{3}.$$

5. Expliquer pourquoi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ en termes de chemins.

Choisir les k succès revient à choisir les $n - k$ échecs : il y a autant de chemins.

6. Calculer la somme des nombres de la ligne 8. Interpréter.

$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256 = 2^8$: c'est le nombre total de chemins d'un arbre à 8 épreuves.

Calculer des probabilités avec une loi binomiale

Exercice 5. Contrôle qualité

Une machine produit des bouteilles dont 5 % présentent un défaut. On prélève au hasard 8 bouteilles (tirage assimilé à un tirage avec remise). X désigne le nombre de bouteilles défectueuses.

1. Quelle est la loi de X ?

$$X \sim \mathcal{B}(8 ; 0,05).$$

2. Calculer la probabilité qu'aucune bouteille ne soit défectueuse.

$$P(X = 0) = 0,95^8 \approx 0,6634.$$

3. Calculer la probabilité qu'au moins une bouteille soit défectueuse.

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,95^8 \approx 0,3366.$$

4. Calculer $P(X = 2)$ à l'aide d'un coefficient binomial.

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,05^2 \times 0,95^6 = 28 \times 0,0025 \times 0,95^6 \approx 0,0515.$$

5. Calculer l'espérance de X et l'interpréter.

$E(X) = 8 \times 0,05 = 0,4$: sur un grand nombre de prélèvements de 8 bouteilles, il y a en moyenne 0,4 bouteille défectueuse par prélèvement.

6. Calculer $P(X = 1)$ puis $P(X \leq 1)$.

$$P(X = 1) = 8 \times 0,05 \times 0,95^7 \approx 0,2793 ; P(X \leq 1) \approx 0,6634 + 0,2793 = 0,9428.$$

7. Calculer $P(X \geq 2)$.

$$1 - 0,9428 = 0,0572.$$

8. Si l'on trouve au moins 2 bouteilles défectueuses, on arrête la machine pour la régler. Cet arrêt est-il fréquent si la machine fonctionne normalement ?

Non : cela n'arrive qu'environ 5,7 % du temps.

9. On prélève désormais 30 bouteilles. À l'aide de la calculatrice, calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 3)$.

$$X \sim \mathcal{B}(30 ; 0,05) : P(X = 0) = 0,95^{30} \approx 0,2146 ; P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,8122 = 0,1878.$$