Application de la dérivation

Prélude - Historique et contexte

Dès 1638, Pierre de Fermat remarque qu'au sommet ou au creux d'une courbe, la tangente est horizontale : c'est sa « méthode des maxima et minima ». Avec la dérivation de Newton et Leibniz, cette idée devient un outil systématique. On l'utilise pour **optimiser** : minimiser le coût de fabrication d'une boîte, maximiser un bénéfice, trouver le trajet le plus rapide (la lumière suit le chemin le plus court en temps, principe de Fermat).

I Sens de variation et signe de la dérivée

Propriété (admise)

Soit f dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

Si f' est strictement positive sauf en des points isolés où elle s'annule, f est strictement croissante.

Méthode - Étudier les variations d'une fonction

1. Calculer $f'(x)$;
2. étudier le signe de $f'(x)$ (factoriser, utiliser le signe d'un trinôme, d'une fonction affine) ;
3. dresser le tableau de variations, en calculant les valeurs aux bornes et aux extremums.

Exemple

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	7	↘	-25	↗	

II Extremums

Définition

f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in J$ (minimum local : $f(x) \geqslant f(a)$).

Propriété

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Si f' **s'annule en changeant de signe** en a, alors f admet un extremum local en a.

⚠ $f'(a) = 0$ ne suffit pas : pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais f est croissante sur $\mathbb{R}$ (pas d'extremum).

Exemple

Dans l'exemple précédent, f admet un maximum local 7 en -1 et un minimum local -25 en 3.

III Applications

Exemple - Fonction rationnelle

$g(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. $\quad g'(x) = \dfrac{2x\cdot x-(x^2+4)}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ et $x+2 > 0$: $g'(x)$ est du signe de $x-2$. Donc g est décroissante sur $]0\,;\,2]$, croissante sur $[2\,;\,+\infty[$ et admet un minimum $g(2) = 4$.

Méthode - Démontrer une inégalité

Pour montrer que $f(x) \geqslant g(x)$ sur I, on étudie les variations de $h = f - g$ et on montre que son minimum est positif.

Exemple : montrer que $x^3 \geqslant 3x-2$ pour $x \geqslant 0$. $h(x) = x^3 - 3x + 2$, $h'(x) = 3(x^2-1)$: h décroît sur $[0\,;\,1]$ puis croît, minimum $h(1) = 0$. Donc $h(x) \geqslant 0$.

Exemple - Optimisation

On découpe des carrés de côté x aux coins d'une plaque carrée de 30 cm de côté pour former une boîte sans couvercle. Volume : $V(x) = x(30-2x)^2$ pour $x \in [0\,;\,15]$.

$V'(x) = (30-2x)^2 - 4x(30-2x) = (30-2x)(30-6x)$, qui s'annule en 5 (et en 15). V croît sur $[0\,;\,5]$ puis décroît : le volume maximal est $V(5) = 2\,000$ cm^3.