Dérivation

Prélude - Historique et contexte

À la fin du XVIIe siècle, Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz inventent indépendamment le **calcul différentiel**. Newton cherche à décrire la vitesse instantanée des planètes ; Leibniz cherche la tangente à une courbe. Leur querelle de priorité divisera l'Europe savante pendant des décennies. Les notations $f'(x)$ (Lagrange) et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (Leibniz) sont toujours utilisées. La dérivée mesure une **vitesse de variation** : vitesse, débit, coût marginal, intensité électrique.

I Taux de variation et nombre dérivé

Définition - Taux de variation

Soit f définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$. Le **taux de variation** de f entre a et $a+h$ est

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

C'est le coefficient directeur de la sécante passant par $A(a\,;\,f(a))$ et $M(a+h\,;\,f(a+h))$.

Définition - Nombre dérivé

f est **dérivable en** a si $\tau(h)$ tend vers un nombre réel ℓ quand h tend vers 0. Ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}.$$

Exemple

$f(x) = x^2$ et $a = 3$: $\dfrac{(3+h)^2-9}{h} = \dfrac{6h+h^2}{h} = 6+h$, qui tend vers 6 quand $h \to 0$. Donc $f'(3) = 6$.

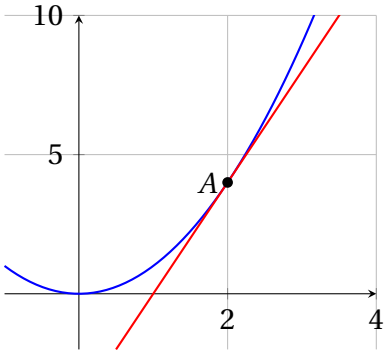
II Tangente à une courbe

Définition - Propriété

Si f est dérivable en a, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;\,f(a))$ est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation est

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}.$$

Graphiquement, $f'(a)$ se lit comme le coefficient directeur de la tangente.



Exemple

Tangente à la parabole $y = x^2$ en $a = 2$: $f(2) = 4$, $f'(2) = 4$, donc $y = 4(x-2)+4 = 4x-4$.

III Fonctions dérivées usuelles

Définition

f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout a de I. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f.

Propriété - Dérivées des fonctions de référence

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;\,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$

⚠ La fonction racine carrée est définie en 0 mais n'y est pas dérivable (la tangente y est verticale).

IV Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

u et v sont dérivables sur I, k un réel.

$u+v$	ku	uv	$\dfrac{1}{v}$ $(v \neq 0)$	$\dfrac{u}{v}$ $(v \neq 0)$
$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Composée avec une fonction affine : la dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$ est $x \mapsto a\,g'(ax+b)$.

Exemples

- $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 1$: $f'(x) = 12x^3 - 10x + 7$.
- $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$: $f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x+1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}$.
- $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$: $f'(x) = \dfrac{1 \times (x-1) - (x+3) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$.
- $f(x) = (5x-2)^3$: $f'(x) = 5 \times 3(5x-2)^2 = 15(5x-2)^2$.