# Fonction exponentielle

## Prélude - Historique et contexte

Le nombre $e \approx 2,718$ apparaît en 1683 chez Jacques Bernoulli à propos des intérêts composés : un capital placé à 100 % par an, avec des intérêts versés $n$ fois par an, est multiplié par $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, qui se rapproche de $e$ quand $n$ grandit. Euler lui donne son nom vers 1728. La fonction exponentielle modélise la croissance des populations, la radioactivité, le refroidissement.

## I Définition et premières propriétés

### Théorème - Définition (admis)

Il existe une unique fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On l'appelle **fonction exponentielle** et on la note exp.

### Propriété

Pour tout réel $x$ : $\exp(x) \neq 0$, et même $\exp(x) > 0$.
Démonstration de la non-annulation : la fonction $h(x) = \exp(x)\exp(-x)$ a pour dérivée $\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$, donc $h$ est constante égale à $h(0) = 1$.

### Propriété - Relation fonctionnelle

Pour tous réels $a$ et $b$ : $\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$.

Conséquences : $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$ ; $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ ; $\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

### Définition - Notation $e^x$

On note $e = \exp(1) \approx 2,718$. Pour tout réel $x$, on note $\exp(x) = e^x$. Les règles de calcul sont celles des puissances : $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, $(e^a)^n = e^{na}$, $e^0 = 1$.

### Exemple

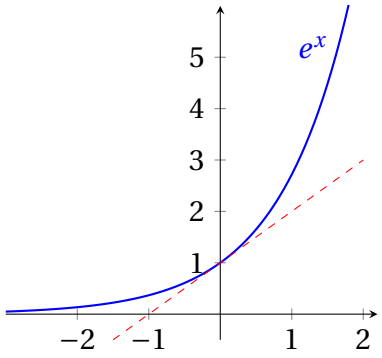
$$\frac{e^{3x} \times e^{-x}}{e^{x+1}} = e^{3x-x-x-1} = e^{x-1}.$$

# II Étude de la fonction exponentielle

## Propriété - Variations et courbe

$\exp' = \exp > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$.
La courbe est au-dessus de cette tangente.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $e^x$ | | |




## Propriété - Équations et inéquations

Pour tous réels $a$ et $b$ : $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.

## Exemple

$e^{2x-1} = e^{x+3} \iff 2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$.
$e^{x^2} \geqslant e^{4x-3} \iff x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \iff x \in ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$.

## Propriété - Dérivée de $e^{ax+b}$

Pour tous réels $a$ et $b$, la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto a\,e^{ax+b}$.

## Exemple

$f(x) = (2x-3)e^x$ : $f'(x) = 2e^x + (2x-3)e^x = (2x-1)e^x$. Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x - 1$ : $f$ est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

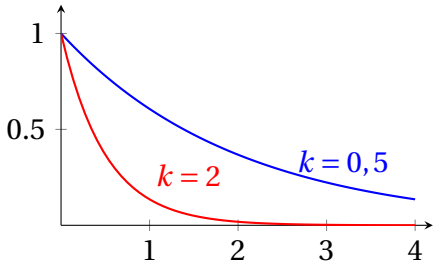
# III Suites géométriques et modélisation

## Propriété

Pour tout réel $a$, la suite $(e^{na})$ est géométrique de raison $e^a$.

## Propriété - Fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$ $(k > 0)$

Pour $k > 0$, la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est croissante (croissance exponentielle) et la fonction $t \mapsto e^{-kt}$ est décroissante (décroissance exponentielle). Plus $k$ est grand, plus l'évolution est rapide.




## Exemple - Décharge d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur est $u(t) = 12e^{-0,5t}$ (en volts, $t$ en secondes). $u(0) = 12$ et $u(2) = 12e^{-1} \approx 4,4$ V. La tension décroît vers 0.