Produit scalaire

Prélude - Historique et contexte

Le produit scalaire apparaît au XIXe siècle avec les travaux de Hamilton (quaternions, 1843) puis de Grassmann et de Gibbs, qui fixe la notation moderne vers 1880. En physique, le travail d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement $\vec{AB}$ vaut $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$: seule la composante de la force dans la direction du déplacement « travaille ».

I Définitions et expressions

Définition - Norme

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la **norme** de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $\vec{u} = \vec{AB}$, $\|\vec{u}\| = AB$.

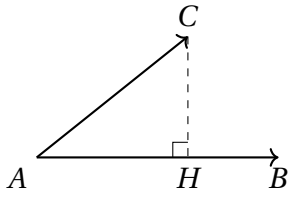
Définition - Avec le cosinus

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$. Si l'un des vecteurs est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété - Projection orthogonale

Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ ont le même sens ;
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ sinon.



Propriété - Expression analytique

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$.

Propriété - Avec les normes

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

Exemple

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 - 4 = 2$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{20}$, donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{2}{\sqrt{200}} \approx 0{,}141$ et l'angle mesure environ $81{,}9°$.

II Propriétés

Propriété - Règles de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$; $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$; $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$; $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Identités : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Propriété - Orthogonalité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Propriété - Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, avec $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$.

Démonstration : $BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = AC^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC} + AB^2$.

Exemple

$AB = 5$, $AC = 7$, $\widehat{A} = 60°$: $BC^2 = 49 + 25 - 2\times 7\times 5\times \frac{1}{2} = 39$, donc $BC = \sqrt{39} \approx 6{,}24$.

III Applications en géométrie repérée

Définition - Vecteur normal

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d.

Propriété

La droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Réciproquement, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Méthode - Équation d'une droite de vecteur normal donné

Droite passant par $A(2;1)$, de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$: $M(x;y) \in d \iff \vec{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff 3(x-2) - 2(y-1) = 0 \iff 3x - 2y - 4 = 0$.

Propriété - Équation d'un cercle

Le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r a pour équation $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$.

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0$.

Méthode - Reconnaître un cercle

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \iff (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 3 = 0 \iff (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$: cercle de centre $(2;-3)$ et de rayon 4.

Méthode - Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Pour projeter $A(5;4)$ sur $d : x - y + 1 = 0$: on cherche H sur d tel que $\vec{AH}$ soit colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

$H(5+t;4-t)$ et $5 + t - 4 + t + 1 = 0$ donc $t = -1$: $H(4;5)$. La distance de A à d est $AH = \sqrt{2}$.