

Suites géométriques et fonctions exponentielles

Prélude - Historique et contexte

Selon une légende indienne, l'inventeur du jeu d'échecs demanda comme récompense un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite en doublant. Sur la 64^e case, il aurait fallu 2^{63} grains, soit bien plus que toute la production mondiale ! C'est la **croissance exponentielle** : une grandeur multipliée par le même nombre à chaque étape. On la retrouve dans les intérêts composés, la croissance de populations, la propagation d'une épidémie ou la désintégration radioactive. En 1798, Thomas Malthus compare déjà une population à croissance exponentielle et des ressources à croissance linéaire.

I Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q , appelé **raison**, tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre q .

Propriété

Si (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors pour tout n : $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété - Lien avec les évolutions

Augmenter de t % revient à multiplier par $q = 1 + \frac{t}{100}$; diminuer de t % revient à multiplier par $q = 1 - \frac{t}{100}$.

Exemple

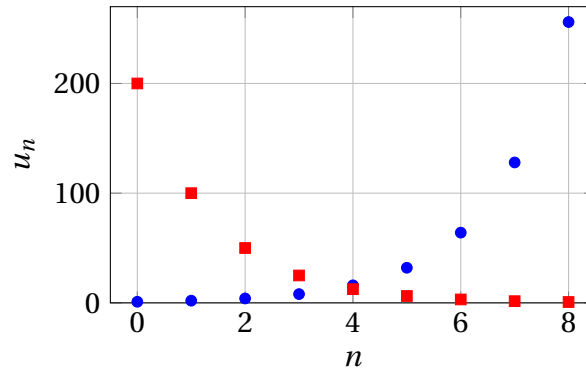
On place 2 000 € à intérêts composés au taux annuel de 3 %. On note u_n le capital après n années. $u_0 = 2000$ et $u_{n+1} = 1,03 u_n$: la suite est géométrique de raison 1,03, donc $u_n = 2000 \times 1,03^n$.
Après 10 ans : $u_{10} = 2000 \times 1,03^{10} \approx 2687,83$ €.

Propriété - Sens de variation (pour $u_0 > 0$)

- si $q > 1$, la suite est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$, la suite est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, la suite est constante.

Remarque - Représentation graphique

Les points $(n; u_n)$ ne sont pas alignés : ils sont situés sur une courbe qui « s'envole » (si $q > 1$) ou qui « s'écrase » vers 0 (si $0 < q < 1$).



En bleu $u_n = 2^n$; en rouge $v_n = 200 \times 0,5^n$.

II Fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$

Définition

Soit $a > 0$. La suite a^n n'est définie que pour des entiers. On la prolonge en une fonction définie sur $[0; +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$), appelée **fonction exponentielle de base a** : $x \mapsto a^x$. C'est la version continue d'une suite géométrique.

Propriétés algébriques

Pour $a > 0$, x et y réels : $a^0 = 1$ $a^{x+y} = a^x \times a^y$ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$.

En particulier $a^{1/n}$ est le nombre positif dont la puissance n vaut a : $(a^{1/n})^n = a$. Par exemple $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$.

Propriété - Sens de variation

Si $a > 1$, $x \mapsto a^x$ est strictement croissante ; si $0 < a < 1$, elle est strictement décroissante ; si $a = 1$, elle est constante égale à 1.

III Taux d'évolution moyen

Définition

Si une grandeur subit n évolutions successives de coefficient multiplicateur global C , le **taux d'évolution moyen** t_m est le taux qui, appliqué n fois, donne la même évolution globale :

$$(1 + t_m)^n = C \quad \text{donc} \quad \boxed{t_m = C^{1/n} - 1}.$$

Exemple

Une population passe de 20 000 à 26 000 habitants en 5 ans. $C = \frac{26000}{20000} = 1,3$.

$t_m = 1,3^{1/5} - 1 \approx 0,0539$: la population a augmenté en moyenne d'environ 5,39 % par an.

Exemple - Fraction d'année

Le capital de l'exemple du I, au bout de 6 mois, vaut $2000 \times 1,03^{0,5} \approx 2029,78$ €.

IV Problèmes de seuil

Méthode

Pour savoir à partir de quand une grandeur exponentielle dépasse un seuil, on peut utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice, une représentation graphique ou un algorithme.

Exemple

Au bout de combien d'années le capital de 2 000 € placé à 3 % dépasse-t-il 3 000 €?

```
u = 2000
n = 0
while u <= 3000:
    u = u * 1.03
    n = n + 1
print(n)          # affiche 14
```

En effet $2000 \times 1,03^{13} \approx 2937$ et $2000 \times 1,03^{14} \approx 3025$.

Remarque - Ordres de grandeur

Une croissance de 7 % par an double une quantité en environ 10 ans ($1,07^{10} \approx 1,97$). En 30 ans, elle la multiplie donc par environ 8!