

Fonctions affines et suites arithmétiques

Prélude - Historique et contexte

Les fonctions affines et les suites arithmétiques modélisent des phénomènes de croissance linéaire omniprésents dans la nature, l'économie et les sciences.

Ces croissances qui reposent sur l'addition sont étudiées et référencées très tôt dans l'histoire humaine. C'est au XIV^{ème} siècle que sont étudiées les suites arithmétiques dans une forme qui commence à ressembler à ce que l'on a aujourd'hui. Quant aux fonctions elles sont formalisées au XVIII^{ème} siècle avec, parmi les premières étudiées, les fonctions affines.

Aujourd'hui elles sont utilisées massivement dans tous les domaines, souvent pour des modélisation à court terme.

Ces deux notions sont intimement liées : une suite arithmétique est la version discrète d'une fonction affine. Tout comme les marches d'un escalier et un toboggan peuvent décrire la même descente.

I Notion de suites

Exemple

terme 0	terme 1	terme 2	terme 3	terme 4	terme 5
1	2	3			
3	2	1			
110	120	130			
2	4	6			
2	4	8			
1000	100	10			
-7	7	17			
-12	-3	6			

Définition

Une **suite** est une liste ordonnée de nombres réels.

On note souvent (u_n) la suite, et u_n le terme de rang n .

La suite peut être définie :

- par une **formule explicite** qui permet de calculer n'importe quel terme directement.
- par une **relation de récurrence** qui ne permet que de calculer le terme suivant.

Exemple

Donner le terme de rang 5 pour chacune des suites suivantes :

- $a_n = 2n$.
- $b_n = 5n^2 + 3n - 1$.
- $c_0 = 5$ et on ajoute 3 à chaque étape.
- $d_0 = 27$ et on soustrait 10 à chaque étape.

Remarque

Une suite modélise un phénomène **discret**. Il n'y a pas de terme de rang 1,2 ou 1,5 ou 1,9. On passe directement de 1 à 2. Elle est définie sur les entiers naturels.

À l'inverse une fonction modélise un phénomène **continu** définie sur un intervalle de nombre réels.

II Fonctions affines (rappels)

Définition

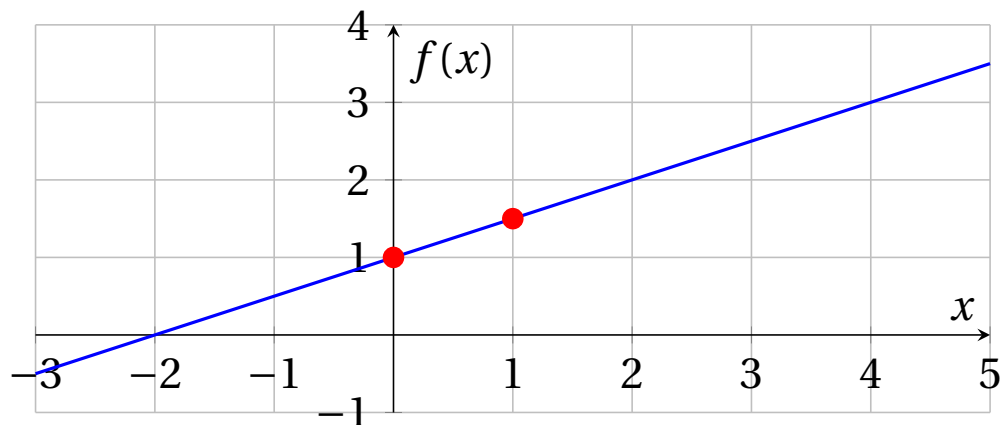
Une fonction f est **affine** lorsqu'il existe deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = ax + b$$

a est le **coefficient directeur** (ou pente) ; b est l'**ordonnée à l'origine**.

Exemple

La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une **droite**.



Ici, $a = 2$ et $b = 1$. La droite passe par $(0 ; 1)$ et $(1 ; 3)$.

Propriété

Le coefficient directeur représente le taux d'accroissement ou la pente de la droite. C'est un nombre constant sur toute la longueur de la droite. Entre deux points de cette droite écartés de 1 en abscisse il y aura toujours un écart de **a** en ordonnée.

Ce nombre **a** s'obtient en prenant deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ qui sont sur cette droite :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple

Dans l'exemple précédent la droite passe par les points (0 ; 1) et (1 ; 3). Sa pente est donc de :

$$a = \frac{3 - 1}{1 - 0} = 2 \text{ qui est bien le coefficient directeur de } f(x).$$

Remarque

Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine. Alors :

- si $a > 0$, f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$;
- si $a = 0$, f est **constante** sur $\mathbb{R}$ ($f(x) = b$);
- si $a < 0$, f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

III Suites arithmétiques

Exemple

Un épargnant place 100 € en janvier 2026 sur un compte en banque et ajoute 30 € chaque mois.

On note u_0 la somme d'argent sur son compte en janvier 2026. Ainsi $u_0 = 100$.

u_1 est la somme d'argent qu'il a sur son compte en février 2026. u_2 en mars 2026. u_3 en avril 2026. etc...

1. Que vaut u_1 ? C'est combien de plus que le mois d'avant représenté par u_0 ?
2. Que vaut u_2 ? C'est combien de plus que le mois d'avant représenté par u_1 ?
3. Que vaut u_3 ? C'est combien de plus que le mois d'avant représenté par u_2 ?
4. Que vaut u_{10} ? C'est combien de plus que le mois d'avant représenté par u_9 ? Et combien de plus que 10 mois avant représenté par u_0 ?

Définition

Une suite (u_n) est **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r , appelé **raison**, tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Autrement dit, on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre r .

Exemple

Une population, estimée à 1000 individus en 2026, augmente de 15 membres par an.

1. Comment modéliser cela avec une suite arithmétique?
2. Combien y aura-t-il d'individus en 2030? En 2040? En 2050?
3. Combien ajoute-t-on tous les 10 ans? Et tous les 15 ans?

Définition

Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , le terme de rang n s'exprime **explicitement** par :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

C'est ce qu'on appelle la **formule explicite**.

Exemple

Donner la formule explicite et calculer le terme de rang 10 pour chaque situation :

1. $u_0 = 33$; $r = 15$.
2. $u_0 = 50$; $r = -4$.
3. Dans un petit théâtre, chaque rangée a 2 sièges de plus que la précédente. La première rangée a 8 sièges.

4. Je mets chaque mois 20 € dans une tirelire (vide initialement).

5. Dans un four, initialement à 20°C, la température augmente de 5°C toutes les minutes pendant le préchauffage.

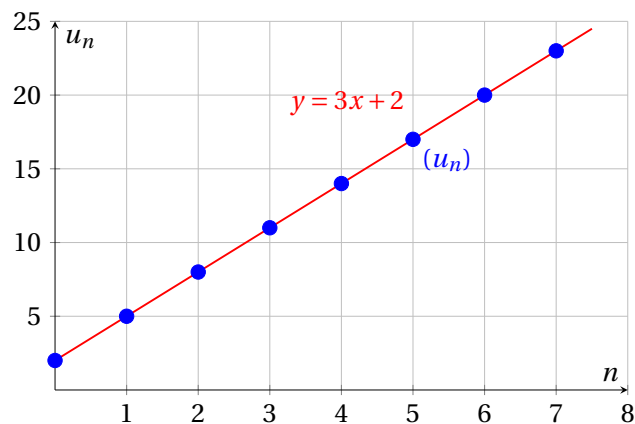
Propriété

La raison de la suite a le même rôle que le coefficient directeur pour une fonction affine. Ainsi on a pour une suite (u_n) arithmétique de raison r :

- si $r > 0$, la suite est **strictement croissante** ;
- si $r = 0$, la suite est **constante** ;
- si $r < 0$, la suite est **strictement décroissante**.

Remarque

On peut représenter graphiquement une suite arithmétique. Dans un repère, les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont **alignés** sur une droite.



La droite a pour équation $y = rx + u_0$, où r est le coefficient directeur (la raison) et u_0 l'ordonnée à l'origine (le terme de rang 0).