

Probabilités conditionnelles

Prélude - Historique et contexte

Les probabilités naissent au XVII^e siècle d'une correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat à propos de jeux de hasard. Un siècle plus tard, Thomas Bayes étudie comment une information nouvelle modifie une probabilité : c'est l'idée de probabilité conditionnelle. Elle est essentielle en médecine (un test positif signifie-t-il vraiment qu'on est malade?), en justice ou pour comprendre des paradoxes célèbres comme celui de Monty Hall.

I Probabilité conditionnelle

Définition

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

C'est la probabilité que B se réalise lorsqu'on sait que A est réalisé.

Exemple - À partir d'un tableau croisé

On a testé 1 000 personnes pour une maladie.

	Malade (M)	Non malade ($\bar{M}$)	Total
Test positif (T)	45	95	140
Test négatif ($\bar{T}$)	5	855	860
Total	50	950	1 000

On choisit une personne au hasard.

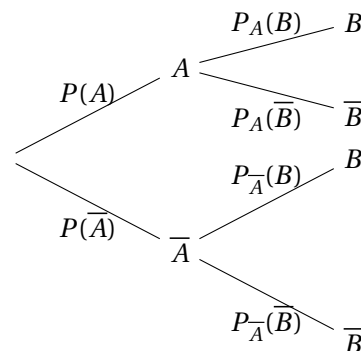
- $P_M(T) = \frac{45}{50} = 0,9$: 90 % des malades ont un test positif.
- $P_T(M) = \frac{45}{140} \approx 0,32$: seulement 32 % des personnes testées positives sont malades! Les autres sont des **faux positifs**.

II Arbre pondéré

Propriété - Règles de calcul

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent (**probabilités totales**) :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$



Exemple

Dans un lycée, 60 % des élèves sont demi-pensionnaires (D). Parmi eux, 30 % mangent un dessert (S) ; parmi les externes, 50 % en mangent.

$$P(D \cap S) = 0,6 \times 0,3 = 0,18 \quad \text{et} \quad P(S) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,5 = 0,18 + 0,2 = 0,38.$$

Sachant qu'un élève mange un dessert, la probabilité qu'il soit demi-pensionnaire est $P_S(D) = \frac{0,18}{0,38} \approx 0,47$.

III Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Si $P(A) \neq 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .

Exemple

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. A : « c'est un cœur », B : « c'est un roi ».

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, P(A \cap B) = \frac{1}{32} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} : A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}$$

Remarque

Ne pas confondre **indépendants** et **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$). Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.

IV Répétition d'épreuves de Bernoulli

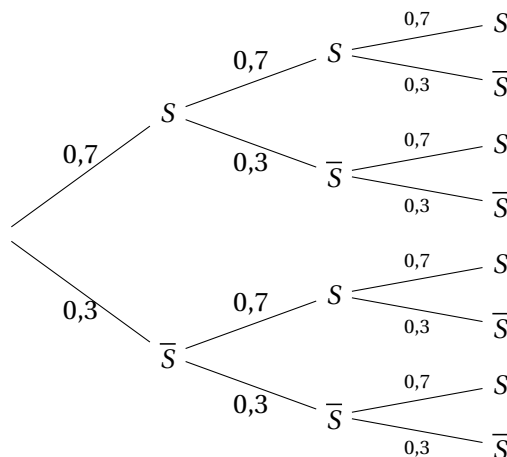
Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues : **succès** (S) de probabilité p et **échec** ($\bar{S}$) de probabilité $1 - p$.

Lorsqu'on répète n fois la même épreuve de façon indépendante, on représente la situation par un arbre dont chaque chemin a pour probabilité le produit de ses branches.

Exemple

Un joueur de basket réussit un lancer franc avec la probabilité 0,7. Il tire 3 fois de façon indépendante.



- Probabilité de 3 réussites : $0,7^3 = 0,343$.
- Probabilité d'aucune réussite : $0,3^3 = 0,027$; donc probabilité d'au moins une réussite : $1 - 0,027 = 0,973$.
- Probabilité d'exactement 2 réussites : 3 chemins ($SS\bar{S}$, $S\bar{S}S$, $\bar{S}SS$) de probabilité $0,7^2 \times 0,3$ chacun, soit $3 \times 0,147 = 0,441$.